Metody Realizacji Języków Programowania

Analiza semantyczna

Marcin Benke

MIM UW

16 października 2014

Analiza semantyczna

- Analiza nazw
  - Czy x jest zadeklarowane przed użyciem?
  - Która deklaracja x obowiazuje w danym miejscu programu?
  - Czy jakieś nazwy są zadeklarowane a nie używane?
- Analiza zgodności typów
  - Czy wyrażenie e jest poprawne typowo?
  - Jakiego typu jest e?
  - Czy funkcja zawsze zwraca wartość typu zgodnego z zadeklarowanym?
- Identyfikacja operacji
  - Jaką operację reprezentuje $+$ wyrażeniu $a + b$?

Odpowiedzi na te pytania mogą wymagać informacji nielokalnych — *kontekstowych*. Nie są to własności bezkontekstowe.

Gramatyki atrybutywne

Wygodnym narzędziem opisu reguł kontekstowych są *gramatyki atrybutywne*

Gramatyka atrybutywna

$$AG = \langle G, A, R \rangle$$

G — gramatyka bezkontekstowa, A — zbiór atrybutów,
R — zbiór reguł atrybutowania

Niech A(X) — zbiór atrybutów symbolu X;
X.a oznacza atrybut a symbolu X.
Dla produkcji $p : X_0 \to X_1 \dots X_n$ definiujemy reguły atrybutowania

$$R(p) = \{X_i.a \leftarrow f_{i,a}(X_j.b \dots X_k.c) \mid 0 \le i \le n, a \in A(X_i)\}$$

Well defined Attribute Grammar

Mając drzewo struktury chcemy dla każdego wierzchołka X wyznaczyć wartości wszystkich atrybutów zgodnie z regułami atrybutowania.

Definicja (WAG)

Gramatyka atrybutywna jest **dobrze zdefiniowana** jeśli dla każdego drzewa struktury zgodnego z tą gramatyką można w sposób jednoznaczny wyznaczyć wartości wszystkich atrybutów.

Nieważne "jak", ważne, że "można".
Zagrożenia: brak reguły, sprzeczne reguły, cykl

Atrybuty syntetyzowane i dziedziczone

Dla produkcji $p : X_0 \to X_1 \dots X_n$ zbiorem **definiujących wystąpień atrybutów** jest

$$AF(p) = \{X_i.a \mid X_i.a \leftarrow f(\cdots) \in R(p)\}$$

- Atrybut $X.a$ jest **syntetyzowany**, jeśli istnieje produkcja $p : X \to \alpha$ i $X.a \in AF(p)$ (czyli zależy od poddrzewa)
- Atrybut $X.a$ jest **dziedziczony**, jeśli istnieje produkcja $q : Y \to \alpha X \beta$ i $X.a \in AF(q)$ (czyli zależy od otoczenia)

Oznaczenia:
$AS(X)$ — atrybuty syntetyzowane X,
$AI(X)$ — atrybuty dziedziczone X.
Dla symboli terminalnych mówimy o **atrybutach wbudowanych**.

Przykład — atrybut syntetyzowany

Konwencja: jeśli dany symbol występuje więcej niż raz w danej produkcji, jego wystąpienia numerujemy.

Atrybuty: $E.val$ — syntetyzowane, $n.val$ — wbudowany

$E_0 \to E_1 + E_2 \ \{E_0.val \leftarrow E_1.val + E_2.val\}$
$E_0 \to E_1 * E_2\{E_0.val \leftarrow E_1.val * E_2.val\}$
$E_0 \to n \ \{E_0.val \leftarrow n.val\}$

Zadanie programistyczne 1

Dana lista liczb. Obliczyć jej średnią.

Zadanie programistyczne 1

Dana lista liczb. Obliczyć jej średnią.

```
-- avg xs = sum xs / length xs
```

Zadanie programistyczne 1

Dana lista liczb. Obliczyć jej średnią.

```
-- avg xs = sum xs / length xs

avg xs = sum / len where
  (sum,len) = foldr cons (0,0) xs
  cons x (sum',len') = (x+sum',1+len')

foldr :: (a → b → b) → b → [a] → b
foldr cons nil = go where
  go []     = nil
  go (x:xs) = cons x (go xs)
```

Przykład — atrybut syntetyzowany

Konwencja: jeśli dany symbol występuje więcej niż raz w danej produkcji, jego wystąpienia numerujemy.

Atrybuty: *L.len*, *L.sum* — syntetyzowane, *num.val* — wbudowany

$$
\begin{array}{ll}
P \to L & \{P.avg = L.sum / L.len\} \\
L_0 \to nil & \{L_0.len \leftarrow 0,\ L_0.sum \leftarrow 0\} \\
L_0 \to n : L_1 & \{L_0.len \leftarrow 1 + L_1.len,\ L_0.sum = n.val + L_1.sum\}
\end{array}
$$

```
avg :: [Float] → Float
avg xs = sum / len where
 (sum,len) = foldr cons nil xs
 nil = (0.0, 0.0)
 cons x (sum',len') = (x+sum', 1+len')
```

Zadanie programistyczne 2

Dana lista liczb. Obliczyć jej wariancję.

Zadanie programistyczne 2

Dana lista liczb. Obliczyć jej wariancję.

```
var xs = foldr cons 0 xs / length xs where
  cons x xs = (x - listavg)**2
  listavg = avg xs
```

Jak to zrobić za jednym przejściem listy?

Przykład — atrybut dziedziczony

Do dotychczasowych reguł dodajemy:
$L.avg$ — atrybut dziedziczony
$L.var$, $P.var$ — atrybuty syntetyzowane

$$
\begin{array}{ll}
P \to L & \{P.var = L.var,\ L.avg = P.avg\} \\
L_0 \to nil & \{L_0.len \leftarrow 0,\ L_0.sum \leftarrow 0\} \\
L_0 \to n : L_1 & \{L_1.avg \leftarrow L_0.avg,\ L_0.var \leftarrow (n.val - L_0.avg)^2 + L_1.var\}
\end{array}
$$

```
var :: [Float] → Float
var xs = d2 / len where
  (sum,len,d2) = foldr cons nil xs listavg
  listavg = sum / len
  nil avg = (0.0,0,0.0)
  cons x fs avg = let
      (s,l,d2) = fs avg
   in (s+x,l+1,(x-avg)**2+d2)x
```

Przykład — atrybut dziedziczony

$$D \to TL\ \{L.typ \leftarrow D.typ;\ D.typ \leftarrow T.typ\}$$
$$T \to \mathrm{int}\ \{T.typ \leftarrow \mathrm{int}\}$$
$$T \to \mathrm{real}\ \{T.typ \leftarrow \mathrm{real}\}$$
$$L_0 \to L_1, \mathrm{id}\ \{L_1.typ \leftarrow L_0.typ,\ id.typ \leftarrow L_0.typ\}$$
$$L \to \mathrm{id}\ \{id.typ \leftarrow L.typ\}$$

Atrybuty:

- $T.typ$, $D.typ$ — syntetyzowany
- $L.typ$ — dziedziczony
- $id.typ$ — dziedziczony

Gramatyki zupełne

Gramatyka jest zupełna, jeśli dla każdego symbolu X spełnione są warunki:

1. dla każdej produkcji $p : X \to \alpha$ mamy $AS(X) \subseteq AF(p)$,
2. dla każdej produkcji $q : Y \to \alpha X \beta$ mamy $AI(X) \subseteq AF(q)$,
3. $AS(X) \cup AI(X) = A(X)$,
4. $AS(X) \cap AI(X) = \emptyset$.

Katamorfizmy

- `foldr` można uogólnić na wszelkie drzewa struktury; w ogólności mówimy o *katamorfizmach*
- na przykład

```
data Tree a = Leaf | Br (Tree a) a (Tree a)

foldTree :: (b→a→b→b) → b → Tree a → b
foldTree bf lf = go where
  go Leaf        = lf
  go (Br l x r) = bf (go l) x (go r)

count :: Tree a → Int
count = foldTree (λx y z → x + 1 + z) 0
```

- w języku leniwym atrybuty można zwykle wyliczyć przy pomocy katamorfizmu typu

$$T \to (Inh_1 \to Inh_2 \to \cdots \to Inh_m \to (Syn_1, \ldots, Syn_n))$$

Łatwe klasy gramatyk dobrze zdefiniowanych

Gramatyka S-atrybutowana:

- wszystkie atrybuty są syntetyzowane
- wyliczanie atrybutów od liści do korzenia — dobrze łączy się z analizą wstępującą

Gramatyka L-atrybutowana:

- atrybuty moga być syntetyzowane bądź dziedziczone
- atrybuty dziedziczone zależą tylko od rodzica i rodzeństwa na lewo
- można wyliczyć przechodząc drzewo struktury DFS

Tablica symboli

- Opis wszystkich bytów (zmienych, funkcji, typów, klas, atrybutów, metod,...) wystepujących w programie.
- Musi mieć narzuconą strukturę (mechanizm wyszukiwania), odzwierciedlającą reguły wiązania identyfikatorów w danym języku.
- Opis bytu:
  - rodzaj definicji
  - inne informacje zależne od rodzaju
- Byty mogą być wzajemnie powiązane.

Struktura języka a struktura tablicy symboli

Niektóre konstrukcje językowe narzucające strukturę tablicy symboli:

- zagnieżdzanie (struktura blokowa)
- dziedziczenie
- sumowanie (moduły)

```
import java.util.*
class A {
  int a,b;
  class B extends A {
    B() {}
    int f() {
      String a;
    }
}
```

Zasięg i zakres

Zasięg definicji identyfikatora to obszar programu, w którym możemy użyć identyfikatora w zdefiniowanym znaczeniu. Nie musi być ciągły.

Zakres to konstrukcja składniowa, z którą mogą być związane definicje identyfikatorów (funkcja, blok, itp.)

Przykład

```
void f() {
   int a;
   a = g();
   {
     string a;
     b = a;
   }
   h(a,b);
}
```

Zasięg deklaracji `int a` jest zaznaczony na czerwono. Jest ona związana z zakresem funkcji f.

Struktura blokowa

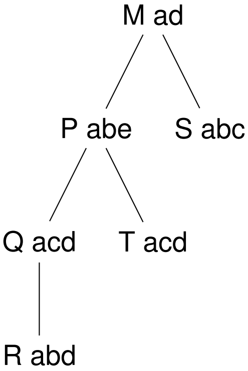
```
module M;
  var a,d : int;
  type t = ...
  procedure P;
    var a,b,e : int
    procedure Q;
      var a,c,d : t;
      procedure R;
        var a,b,d : real;
    end
    procedure T;
      var a,c,d : int;
    end
  procedure S;
    var a,b,c : int;
    d := e+1; // Gdzie są definicje d i e?
  ...
```

Drzewo zagnieżdżeń

Problem: analizujemy węzeł drzewa struktury, np przypisanie `d:=e+1`. Gdzie są definicje `d` i `e`?

Drzewo zagnieżdżeń

Problem: analizujemy węzeł drzewa struktury, np przypisanie `d:=e+1`. Gdzie są definicje `d` i `e`?



Metoda I: stos tablic symboli

Wyszukiwanie:

- przeszukaj zakresy od bieżącego do znalezienia lub do końca,
- jeżeli nie znaleziono, to dodaj fikcyjną definicję dla uniknięcia kaskady błędów.

Wejście do zakresu:

- połóż na stos nową tablicę symboli,
- umieść w niej definicje związane z tym zakresem

Wyjście z zakresu:

- zdejmij ze stosu ostatnią tablicę symboli

Metoda II: tablica stosów

Dla każdego identyfikatora tworzymy osobny stos odwołań do jego definicji

Niezmiennik: w trakcie analizy, dla każdego identyfikatora na szczycie stosu jest odsyłacz do aktualnej definicji (lub stos pusty).

Wejście do zakresu: przechodzimy listę definicji związanych z zakresem i wkładamy odsyłacze do nich na odpowiednie stosy.

Wyjście z zakresu: przechodzimy ponownie listę definicji i zdejmujemy odsyłacze ze stosów.

W porównaniu z Metodą I nieco więcej pracy na granicach zakresów, ale za to szybsze wyszukiwanie.

Zagadka

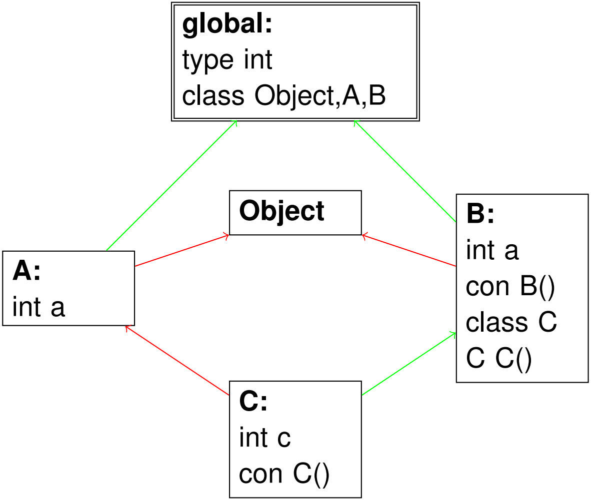
```
class A {
char a;
A() { a = 'A';}
}
class B {
    char a;
    B() { a = 'B'; }
    class C extends A {
        public char c;
        C() { c = a; }
    }
    C C() { return new C(); }
}
...
B b = new B(); B.C c = b.C();
```

Jaką wartość ma `c.c` ?

Dziedziczenie

- Jak widać z powyższego przykładu, dziedziczenie nieco komplikuje wyszukiwanie.
- Przy pojedynczym dziedziczeniu możemy przy wchodzeniu do zakresu podklasy wkładać na stos(y) definicje z nadklasy.
- Innym rozwiązaniem jest modyfikacja metody I: zamiast stosu - graf acykliczny tablic symboli.
- Każda tablica ma dowiązanie do tablic ewentualnych nadklas i zakresu obejmującego.

Przykład



Java odwiedza najpierw czerwoną krawędź.

Systemy typów

System typów — zbiór typów i reguł wnioskowania o typach

Reguły są zwykle wyrażane w postaci

$$\frac{A_1 \quad \dots \quad A_n}{B}$$

oznaczającej “jeśli A_1 i … i A_n to możemy wnioskować B”.

Używamy też notacji

$$\Gamma \vdash e : \tau$$

znaczącej “w środowisku Γ, wyrażenie e ma typ τ”.

Środowisko przypisuje zmiennym typy, tzn. jest zbiorem par $(x : \tau)$.

Prosty system typów

Typy:

$$\tau ::= \textbf{int} \mid \textbf{bool}$$

Wyrażenia:

$$e ::= n \mid b \mid e_1 + e_2 \mid e_1 = e_2 \mid \textbf{if } e_0 \textbf{ then } e_1 \textbf{ else } e_2$$

Reguły:

$$\frac{}{n : \textbf{int}} \qquad \frac{}{b : \textbf{bool}}$$

$$\frac{e_1 : \textbf{int} \quad e_2 : \textbf{int}}{e_1 + e_2 : \textbf{int}} \qquad \frac{e_1 : \textbf{int} \quad e_2 : \textbf{int}}{e_1 = e_2 : \textbf{bool}}$$

$$\frac{e_0 : \mathrm{bool} \quad e_1 : \tau \quad e_2 : \tau}{\textbf{if } e_0 \textbf{ then } e_1 \textbf{ else } e_2 : \tau}$$

Wyprowadzanie typów

Aby wykazać, że wyrażenie e ma typ τ możemy skonstruować *wyprowadzenie typu* (dowód w naszym systemie typów).

$$\cfrac{\cfrac{1 : \mathbf{int} \quad 2 : \mathbf{int}}{1 + 2 : \mathbf{int}} \qquad 3 : \mathbf{int}}{(1 + 2) + 3 : \mathbf{int}}$$

$$\cfrac{\cfrac{1 : \mathbf{int} \quad 0 : \mathbf{int}}{1 = 0 : \mathbf{bool}} \qquad 1 : \mathbf{int} \quad 2 : \mathbf{int}}{\mathbf{if}\ 1 = 0\ \mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}\ 2 : \mathbf{int}}$$

Wyprowadzanie typów działa w tym przypadku od liści do korzenia.

Zmienne

Rozszerzmy nasz język o zmienne:

$$e ::= x \mid n \mid b \mid e_1 + e_2 \mid e_1 = e_2 \mid \textbf{if } e_0 \textbf{ then } e_1 \textbf{ else } e_2$$

Typ zmiennej zależy od kontekstu, rozszerzymy zatem nasze reguły typowania o informacje o kontekście (środowisko).

Będziemy używać notacji

$$\Gamma \vdash e : \tau$$

znaczącej “w środowisku Γ, wyrażenie e ma typ τ”.

Środowisko przypisuje zmiennym typy, tzn. jest zbiorem par $(x : \tau)$, gdzie x jest zmienną zaś τ typem.

Reguły typowania w kontekście

Stałe mają z góry ustalone typy:

$$\frac{}{\Gamma \vdash n : \textbf{int}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash b : \textbf{bool}}$$

Typy zmiennych odczytujemy ze środowiska:

$$\frac{}{\Gamma(x : \tau) \vdash x : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathrm{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathrm{int}}{\Gamma \vdash e_1 + e_2 : \mathrm{int}} \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathrm{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathrm{int}}{\Gamma \vdash e_1 = e_2 : \mathrm{bool}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_0 : \mathrm{bool} \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \textbf{if } e_0 \textbf{ then } e_1 \textbf{ else } e_2 : \tau}$$

Kierunki przepływu danych

Synteza typów:

- jaki typ ma dane wyrażenie: $\vdash e : ?$
- dane płyną w górę drzewa
- skojarzenie: atrybut syntetyzowany

$$\Gamma \vdash e \Rightarrow t$$

Kontrola typów:

- czy wyrażenie ma dany typ t?
- dane płyną w dół drzewa
- skojarzenie: atrybut dziedziczony

$$\Gamma \vdash e \Leftarrow t$$

Kierunki przepływu danych

W miarę potrzeby możemy łączyć te dwa kierunki

Przejście od syntezy do kontroli jest trywialne:

$$\frac{\Gamma \vdash e \Rightarrow t}{\Gamma \vdash e \Leftarrow t}$$

W drugą stronę zwykle potrzebujemy deklaracji typu:

$$\frac{\Gamma \vdash e \Leftarrow t}{\Gamma \vdash (e : t) \Rightarrow t}$$

Kontrola typów w językach imperatywnych

Rozważmy mały język imperatywny:

$$e ::= x \mid n \mid b \mid e_1 + e_2 \mid e_1 = e_2$$
$$s ::= x := e \mid \textbf{while } e \textbf{ do } s \mid s; s$$

Wprowadzimy nowy osąd dla programów

$$\Gamma \vdash_P s$$

o znaczeniu “w środowisku Γ, program s jest poprawny.
Niektóre reguły będą używać zarówno $\vdash$ jak $\vdash_P$, np.

$$\frac{\Gamma \vdash x \Rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash e \Leftarrow \tau}{\Gamma \vdash_P x := e}$$

czy

$$\frac{\Gamma \vdash e \Leftarrow \mathrm{bool} \quad \Gamma \vdash_P p}{\Gamma \vdash_P \textbf{while } e \textbf{ do } p}$$

Deklaracje

Możemy uznać deklarację jako rodzaj instrukcji oraz regułę

$$\frac{\Gamma(x : \tau) \vdash_P p}{\Gamma \vdash_P \textbf{var}\ x : \tau;\ p}$$

inną mozliwością jest wprowadzenie nowego typu osądu, $\vdash_D$:

$$\Gamma \vdash_D (\textbf{var}\ x : \tau) \Rightarrow \Gamma(x : \tau)$$

$$\frac{\Gamma \vdash_D ds \Rightarrow \Gamma' \quad \Gamma' \vdash_P p}{\Gamma \vdash_P ds;\ p}$$

Można też pozwolić instrukcjom na modyfikację środowiska. Deklaracje i instrukcje mogą być wtedy swobodnie przeplatane:

$$\frac{\Gamma \vdash_P s : \Gamma' \quad \Gamma' \vdash_P p : \Gamma''}{\Gamma \vdash_P s;\ p : \Gamma''}$$

Auto

Dla deklaracji z inicjalizatorami możemy wprowadzić odpowiednik `auto` z C++11:

$$\frac{\Gamma \vdash e \Rightarrow \tau}{\Gamma \vdash_D (\textbf{auto}\ x = e) \Rightarrow \Gamma(x : \tau)}$$

Kontrola typów w językach funkcyjnych

Typy:

$$\tau ::= \mathrm{int} \mid \mathrm{bool} \mid \tau_1 \to \tau_2$$

Wyrażenia:

$$E ::= x \mid n \mid b \mid e_1 e_2 \mid \lambda(x:\tau).e \mid e_1 + e_2 \mid e_1 = e_2 \mid$$
$$\textbf{if } e_0 \textbf{ then } e_1 \textbf{ else } e_2$$

Reguły typowania

$$\frac{\Gamma(x:\tau) \vdash e : \rho}{\Gamma \vdash \lambda(x:\tau).e : \tau \to \rho}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau \to \rho \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash e_1 e_2 : \rho}$$

Kierunek przepływu danych

Tu użyteczny może się okazać system dwukierunkowy, np.
Funkcja:

$$\frac{\Gamma(x:\tau) \vdash e \Rightarrow \rho}{\Gamma \vdash \lambda(x:\tau).e \Rightarrow (\tau \to \rho)}$$

Aplikacja:

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \Rightarrow (\tau \to \rho) \quad \Gamma \vdash e_2 \Leftarrow \tau}{\Gamma \vdash e_1\, e_2 \Rightarrow \rho}$$

Przykładowa implementacja

```
findType :: Env → Exp → CM Type
findType env (EInt n)   = return TInt
findType env (EVar x)   = envType x env
findType env (ELam v t e) = do
        t' ← findType ((v,t):env) e
        return (t :→ t')
findType env (EApp e1 e2) = do
        (t1 :→ t) ← findType env e1
        checkType env e2 t1
        return t
findType env (EPlus e1 e2) = do
        checkType env e1 TInt
        checkType env e2 TInt
        return TInt
```

Przykładowa implementacja

```
checkType :: Env → Exp → Type → CM ()
checkType env e@(ELam v t b) (t1 :→ t2) =  do
    if t == t1 then checkType ((v,t):env) b t2
        else
        throwError $unwords ["The arg of",
           show e,"is not of type",show  t]
checkType env e t = do
  t' ← findType env e
  unless (t'==t) $ typeError e t t'

typeError e t t' = throwError $ unwords [
  "Couldn't match expected type", show t,
  "against inferred type", show t',
  "in the expression", show e
  ]
```

Rekonstrukcja typów

- Jeśli typy nie są znane, trzeba *zrekonstruować* pasujące typy.
- Reguły typowania pozostają te same; reguła dla funkcji odpowiada zmienionej składni:

  $$\frac{\Gamma(x : \tau) \vdash e : \rho}{\Gamma \vdash \lambda x.e : \tau \to \rho}$$

  co prowadzi do problemu: skąd wziąć dobre τ?
- Możemy uczynić τ niewiadomą.
  Proces typowania da nam typ wraz z układem równań
- Przy każdym użyciu reguły aplikacji

  $$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \to \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau_2 \quad \tau_1 = \tau_2}{\Gamma \vdash e_1 e_2 : \tau}$$

  dodajemy do układu równanie $\tau_1 = \tau_2$.

Rozwiązywanie równań: unifikacja

Otrzymane układy równań możemy rozwiązywać niemal tak samo jak każde inne: przez upraszczanie.

W każdym kroku mamy układ równań E i podstawienie S (na początku $S = \emptyset$, koniec gdy $E = \emptyset$)

- Równanie $t_1 \to t_2 = u_1 \to u_2$ zastępujemy przez parę równań

$$t_1 = u_1$$
$$t_2 = u_2$$

- Równania postaci $x = x$ usuwamy.
- Gdy E jest postaci $x = t; F$, przy czym $x \notin FV(t)$ to przyjmujemy $E' = F[x := t]$, $S' = [x := t] \circ S$

Kiedy unifikacja zawodzi

Unifikacja zawodzi, gdy napotka jedno z poniższych:

- Równanie postaci (k_1 i k_2 są różnymi stałymi)

$$k_1 = k_2$$

- Równanie postaci (k — stała):

$$k = t \to t'$$

- Równanie postaci

$$x = t$$

  gdzie x — zmienna a t zawiera x ale różny od x.

Na przykład, próba wyprowadzenia typu dla $\lambda x.xx$ prowadzi do

$$\tau_x = \tau_x \to \rho.$$

Ten term nie jest typowalny (w tym systemie).

Polimorfizm

Z drugiej strony, układ równań może mieć więcej niż jedno rozwiązanie. W efekcie możemy wyprowadzić więcej niż jeden typ dla danego wyrażenia. Na przykład, mamy

$$\vdash \lambda x.x : \tau \to \tau$$

dla każdego typu τ!
Dla opisu tego zjawiska możemy wprowadzić nową postać typu: $\forall\alpha.\tau$, gdzie α jest zmienną typową, oraz dwie nowe reguły:

$$\frac{\Gamma \vdash e : \tau}{\Gamma \vdash e : \forall\alpha.\tau}\ \alpha \notin FV(\Gamma) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash e : \forall\alpha.\tau}{\Gamma \vdash e : \tau[\rho/\alpha]}$$

($\tau[\rho/\alpha]$ oznacza typ τ z ρ podstawionym za α).

Polimorfizm — przykłady i smutna konstatacja

Możemy wyprowadzić

$$\vdash \lambda x.x : \forall\alpha.\alpha \to \alpha$$

Także $\lambda x.xx$ staje się typowalne:

$$\vdash \lambda x.xx : \forall\beta(\forall\alpha.\alpha \to \alpha) \to \beta \to \beta$$

Niestety nowy system nie jest już sterowany składnią: nowe reguły nie odpowiadają żadnym konstrukcjom składniowym i nie wiemy kiedy je stosować. Okazuje się, że rekonstrukcja typów w tym systemie jest **nierozstrzygalna**.

Płytki polimorfizm

Rekonstrukcja typów jest rozstrzygalna jeśli wprowadzimy pewne ograniczenie: kwantyfikatory są dopuszczalne tylko na najwyższym poziomie oraz mamy specjalną składnię dla wiązań polimorficznych:

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma(x : \forall\vec{\alpha}.\tau_1) \vdash e : \tau}{\Gamma \vdash \textbf{let } x = e_1 \textbf{ in } e : \tau}$$

Taki system jest często wystarczający w praktyce. Na przykład możemy zastąpić konstrukcję **if** funkcją

$$\mathit{if\_then\_else\_} : \forall\alpha.\mathrm{bool} \to \alpha \to \alpha \to \alpha$$

Jest on również podstawą systemów dla ML i Haskella (choć ten ostatni jest znacznie bardziej skomplikowany).

Podtypy

Jeśli klasa B dziedziczy po C, każdy obiekt klasy B moze być użyty w miejscu, gdzie spodziewany jest obiekt klasy C.

Można to sformalizować przy pomocy pojęcia *podtypu* (podobnego do pojęcia podzbioru):

$$\frac{\Gamma \vdash e : B \quad B \leq C}{\Gamma \vdash e : C}$$

Można też przepisać regułę aplikacji tak:

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \to \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau_2 \quad \tau_2 \leq \tau_1}{\Gamma \vdash e_1 e_2 : \tau}$$

Przy każdym użyciu reguły aplikacji sprawdzamy, że nierówność $\tau_2 \leq \tau_1$. zachodzi, przy rekonstrukcji dodajemy do układu nierówność do zbioru ograniczeń (i w efekcie rozwiązujemy układy nierówności zamiast równań).

Przeciążanie

- Funkcje polimorficzne działają niezależnie od typu argumentów.
- Przeciążanie oznacza, że jeden symbol funkcyjny (operator) oznacza różne funkcje dla różnych typów argumentów.
- Podczas kontroli typów przeciążone symbole są zastępowane przez ich warianty odpowiednie dla typów argumentów.
- W systemie typów możemy to wyrazić następująco:

$$\Gamma \vdash e \rightsquigarrow e' : \tau$$

co oznacza “w środowisku Γ, wyrażenie e ma typ τ i jest przekształcane do e'”.

Równość

- Nawet w językach, które nie wspierają przeciążania jawnie, operator równości jest w istocie przeciążony.
- W istocie na przykład równość dla napisów musi być zrealizowana inaczej niż dla liczb.
- W naszym języku możemy dopuścić równość dla typów `int` i `bool` i dodać następujące reguły transformacji:

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \rightsquigarrow e_1' : \mathrm{int} \quad \Gamma \vdash e_2 \rightsquigarrow e_2' : \mathrm{int}}{\Gamma \vdash e_1 = e_2 \rightsquigarrow \texttt{eqInt}\ e_1'\ e_2' : \mathrm{bool}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \rightsquigarrow e_1' : \mathrm{bool} \quad \Gamma \vdash e_2 \rightsquigarrow e_2' : \mathrm{bool}}{\Gamma \vdash e_1 = e_2 \rightsquigarrow \texttt{eqBool}\ e_1'\ e_2' : \mathrm{bool}}$$

gdzie `eqInt` i `eqBool` są wbudowanymi operacjami równości dla odpowiednich typów.

Konwersje typów

Czasami (zwłaszcza dla typów numerycznych) zachodzi potrzeba konwersji — zamiany wartości jednego typu na odpowiadającą mu wartość innego typu, np:

```
int r = 20000;
int x = int(3.14159 * double(r));
```

NB wartości typu int są reprezentowane inaczej niż double i konwersja musi być rzeczywiście dokonana w czasie wykonania programu.

Niektóre języki wstawiają konwersje (zwane wtedy czasem koercjami) automatycznie , pozwalając pisać

```
int x = 3.14159 * r;
```

Takie wstawianie koercji możemy zrealizować np

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \leadsto e_1' : \textbf{int} \quad \Gamma \vdash e_2 \leadsto e_2' : \textbf{double}}{\Gamma \vdash e_1 + e_2 \leadsto \mathit{int2double}(e_1') + e_2' : \textbf{double}}$$