

Egzamin z Teorii informacji. 8 marca 2010, godz. 12–15

Każde zadanie proszę napisać na oddzielnej *czytelnie podpisanej* kartce.

1. (10 pt.) Mamy 8 monet: 2 lekkie i 6 ciężkich. Udowodnij, że wykonując 3 ważenia na wadze szalkowej nie można w ogólności znaleźć obu monet lekkich. Czy można znaleźć przynajmniej jedną z nich ?

Uwaga: na wadze szalkowej możliwe są trzy wyniki ważenia.

2. (10 pt.) Eksperyment polega na jednokrotnym rzucie sprawiedliwą kostką do gry. Niech wartością zmiennej losowej X będzie wyrzucona liczba oczek, a wartością zmiennej losowej Y parzystość wyrzuconej liczby oczek. Oblicz $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $I(X; Y)$.

3. (10 pt.) Jaka własność macierzy kanału charakteryzuje kanały o przepustowości 0 ?

4. (10 pt.) Z miasta A do miasta B prowadzą trzy kable telegraficzne, którymi można przysyłać jeden bit informacji na sekundę. W ciągu sekundy można więc przesłać z A do B trzy bity informacji.

Pracownicy telegrafii ogłosili strajk, polegający na wyłączaniu losowych kabli. Są jednak na tyle odpowiedzialni, że w jednej chwili wyłączą *co najwyżej jeden* kabel. (Kabel wyłączony przesyła 0 niezależnie od tego, co było nadane.) Ile bitów informacji można teraz *bezbłędnie* przesłać z A do B ?

Następnego dnia pracownicy ogłosili zaostrenie protestu, polegające na tym, że w każdej chwili będą wyłączać *dokładnie jeden* kabel. Ile teraz bitów informacji można *bezbłędnie* przesłać z A do B ?

5. (10 pt.) Słowo $x \in \{0, 1\}^*$ jest *losowe w sensie Kołmogorowa*, jeśli spełnia

$$C(|x|) \geq |x|.$$

Liczba naturalna n jest losowa, jeśli jej zapis binarny ma tę własność.

Udowodnić, że wśród liczb naturalnych, które mają co najwyżej 3 dzielniki pierwsze jest co najwyżej skończenie wiele liczb losowych w sensie Kołmogorowa.

6. (10 pt.) Graf skierowany G o zbiorze wierzchołków $\{0, 1, \dots, n-1\}$ utożsamiamy z jego macierzą indycencji, tj. ze słowem $w_G \in \{0, 1\}^{n^2}$, takim że $w_G(i \cdot n + j) = 1$ wtedy, gdy istnieje krawędź z i do j . Graf G jest drzewem, jeśli jego domknięcie symetryczne jest drzewem (nieskierowanym). Dowieść, że słowo w_T może być losowe w sensie Kołmogorowa dla co najwyżej skończenie wielu drzew T .