

## Egzamin z Teorii informacji. 30 stycznia 2010, godz. 14–17

Każde zadanie proszę napisać na oddzielnej *czytelnie podpisanej* kartce.

1. (5 pt.) Czy istnieje kod, który nie jest ani bezprefiksowy, ani bezsufiksowy? Jeśli tak – podaj przykład, jeśli nie – udowodnij.
2. (7 pt.) Oblicz przepustowość kanału o macierzy

$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

3. (12 pt.) W praktyce błędy występujące w kolejnych przesyłanych przez kanał bitach często nie są niezależne, gdyż zakłócenie może trwać dłużej niż czas przesyłu jednego bitu.

Rozważmy zatem następujący binarny kanał symetryczny. Prawdopodobieństwo błędu na  $n$ -tym bicie jest 0.25, gdy poprzedni bit był przesłany poprawnie (lub gdy  $n = 1$ ), natomiast jest 0.5, gdy na poprzednim bicie wystąpił błąd. Załóżmy, że wysyłamy ciąg długości 3. Ciąg binarny reprezentujący możliwy rozkład błędów (1 = błąd, 0 = bez błędu) nazwiemy *scenariuszem*. Np. prawdopodobieństwo scenariusza 100 jest  $0.25 \cdot 0.5 \cdot 0.75 = \frac{3}{32} = 0.09375$ .

Powiemy, że kod  $C \subseteq \{0, 1\}^3$  *poprawia scenariusz*  $A$ , gdy reguła decyzyjna pozwala na bezbłędne odczytanie wyjścia jeśli wystąpił scenariusz  $A$ . Ile co najwyżej słów może mieć kod  $C$ , który poprawia każdy scenariusz, którego prawdopodobieństwo jest

- (a)  $\geq \frac{1}{8}$ ,
- (b)  $\geq \frac{3}{32}$ ?

4. (8 pt.) Przez  $C(x)$  oznaczamy złożoność Kołmogorowa ciągu  $x \in \{0, 1\}^*$ . Niech

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \{0, 1\}^* \times \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$$

będzie obliczalną bijekcją. Złożoność Kołmogorowa pary definiujemy jako

$$C(x, y) = C(\langle x, y \rangle).$$

Udowodnij, że

$$C(x, y) \leq C(x) + \log C(x) + 2 \log \log C(x) + C(y) + \mathcal{O}(1).$$

5. (12 pt.) Załóżmy, że dla każdego  $n$  naturalnego dany jest zbiór  $V_n \subseteq \{0, 1\}^*$  zawierający nie więcej niż  $2^n$  elementów. Załóżmy też, że istnieje algorytm, który generuje potencjalnie nieskończony ciąg wszystkich par  $(x, n)$  takich, że  $x \in V_n$  (innymi słowy relacja  $x \in V_n$  jest rekurencyjnie przeliczalna). Udowodnij, że istnieje stała  $c$  taka, że dla każdego  $n$  wszystkie elementy  $V_n$  mają złożoność Kołmogorowa co najwyżej  $n + 2 \cdot \log n + c$ .

6. (6 pt.) Udowodnij

$$R(X; Y; Z) \leq I(X; Y) \leq H(X).$$

Czy dla każdego  $X$  można znaleźć  $Y$  i  $Z$ , że zachodzi równość?