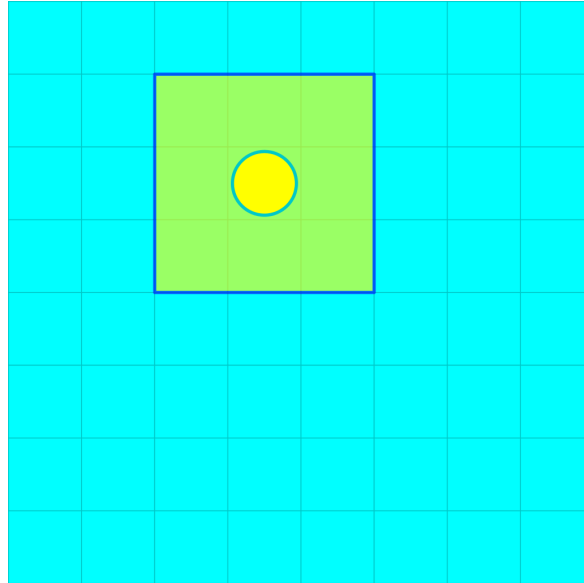


Będę zakładać, że pomoc nadchodzi w postaci helikoptera (bez straty ogólności). Helikopter lądujący na polu ratuje pionka, jeśli ten stoi dokładnie na tym polu lub na sąsiednim. Miejsce lądowania helikoptera wyznacza **kwadrat ratunku**.



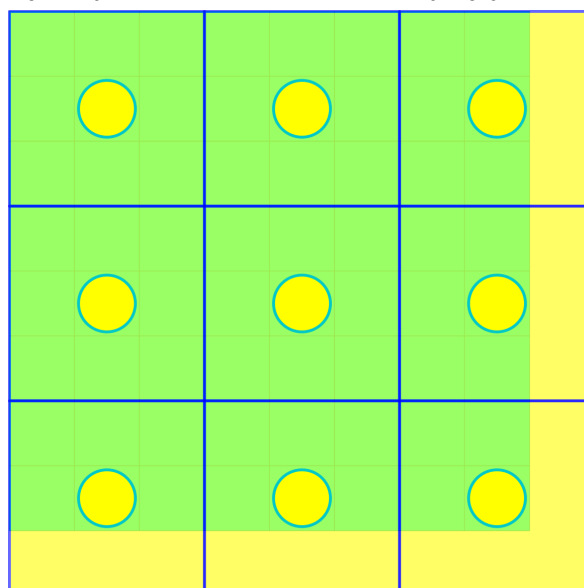
Pokażę 3 rzeczy:

1. Zawsze możemy uratować pionka dla $k=4$
2. Dla $k=3$ i jednostajnego rozkładu A możemy dobrać takie B i C , by ratować pionka z prawdopodobieństwem $15/16$
3. Dla $k=3$ i jednostajnego rozkładu A nie możemy dobrać takich B i C , by ratować pionka z prawdopodobieństwem większym niż $15/16$

Te 3 rzeczy dadzą nam odpowiedzi na wszystkie 3 podpunkty zadania.

1. Zawsze możemy uratować pionka dla $k=4$

Ustalę 9 możliwych miejsc lądowania helikoptera następująco:

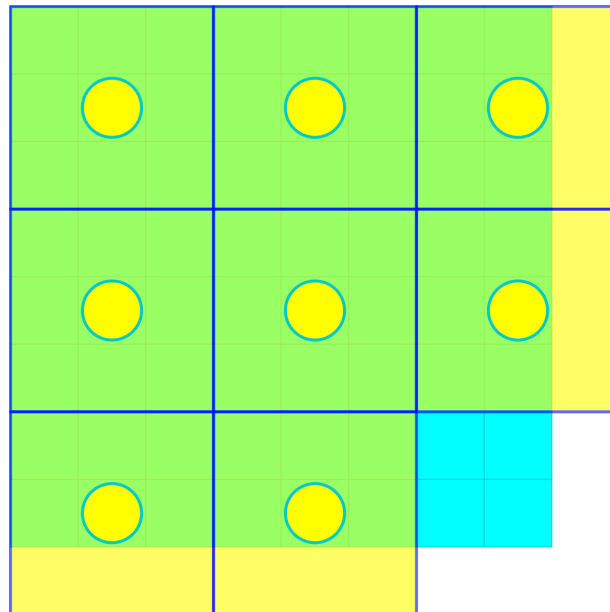


Każde pole szachownicy należy do kwadratu ratunku dla pewnego miejsca lądowania. 4 bity komunikatu B pozwalają nam na zakodowanie $16 > 9$ różnych wiadomości. Możemy zatem

ponumerować miejsca lądowania helikoptera i wysłać w B identyfikator miejsca lądowania, w którego kwadracie ratunku znajduje się pionek. Ta metoda pozwala zawsze uratować pionek.

2. Dla $k=3$ i jednostajnego rozkładu A możemy dobrać takie B i C, by ratować pionek z prawdopodobieństwem 15/16

Ustalam 8 możliwych miejsc lądowania helikoptera następująco:



3 bity komunikatu B pozwalają nam na zakodowanie dokładnie 8 różnych wiadomości. Możemy zatem ponumerować miejsca lądowania helikoptera i wysłać w B identyfikator miejsca lądowania, w którego kwadracie znajduje się pionek. Niestety pola w prawym dolnym rogu nie leżą w żadnym kwadracie ratunku. Jeśli pionek jest na jednym z nich, wysyłamy jakikolwiek identyfikator miejsca lądowania, helikopter ląduje za daleko od pionka i pionek umiera. Ponieważ A ma rozkład jednostajny, to szansa na uratowanie pionka wynosi (liczba pól pokrytych kwadratami ratunku)/(liczba pól) = 60/64 = 15/16.

3. Dla $k=3$ i jednostajnego rozkładu A nie możemy dobrać takich B i C, by ratować pionek z prawdopodobieństwem większym niż 15/16

Weźmy pewną parę (B, C). Załóżmy, że B nie definiuje jednoznacznie C. Wówczas istnieją takie c_1, c_2, b , że

$$p(c_1|b) \neq 0$$

$$p(c_2|b) \neq 0$$

$$p(b) \neq 0$$

Ponieważ A i C są warunkowo niezależne, to

$$p(A \text{ jest w kwadracie ratunku dla } c_1|c_1, b) = p(A \text{ jest w kwadracie ratunku dla } c_1|b)$$

$$p(A \text{ jest w kwadracie ratunku dla } c_2|c_2, b) = p(A \text{ jest w kwadracie ratunku dla } c_2|b)$$

Bez straty ogólności załóżmy, że

$$p(A \text{ jest w kwadracie ratunku dla } c_1|b) \geq p(A \text{ jest w kwadracie ratunku dla } c_2|b)$$

Wówczas wysyłanie helikoptera zawsze na c_1 po otrzymaniu komunikatu b jest nie gorsze niż nasz obecna strategia. Tym sposobem eliminujemy parę (b, c_2) . **Wniosek (prosta indukcja) - szukając pary (B, C) dającej największe szanse na uratowanie pionka, możemy rozważać tylko takie pary (B, C), w których B jednoznacznie definiuje C.**

Weźmy znów pewną parę (B, C). Ponieważ szukamy najlepszej pary (B, C), to możemy już założyć, że B jednoznacznie definiuje C. Załóżmy, że A nie definiuje jednoznacznie B.

Wówczas istnieją takie b_1, b_2, a , że

$$p(b_1|a) \neq 0$$

$$p(b_2|a) \neq 0$$

Oznaczmy przez c_1, c_2 miejsca, na które wysyłamy helikopter odpowiednio po otrzymaniu komunikatu b_1 i b_2

$p(a \text{ zostaje uratowany} | a, b_1) = p(a \text{ zostaje uratowany} | a, c_1) = 1$, gdy a leży w kwadracie ratunku c_1 , 0 w p. p.

$p(a \text{ zostaje uratowany} | a, b_2) = p(a \text{ zostaje uratowany} | a, c_2) = 1$, gdy a leży w kwadracie ratunku c_2 , 0 w p. p.

Bez straty ogólności załóżmy, że

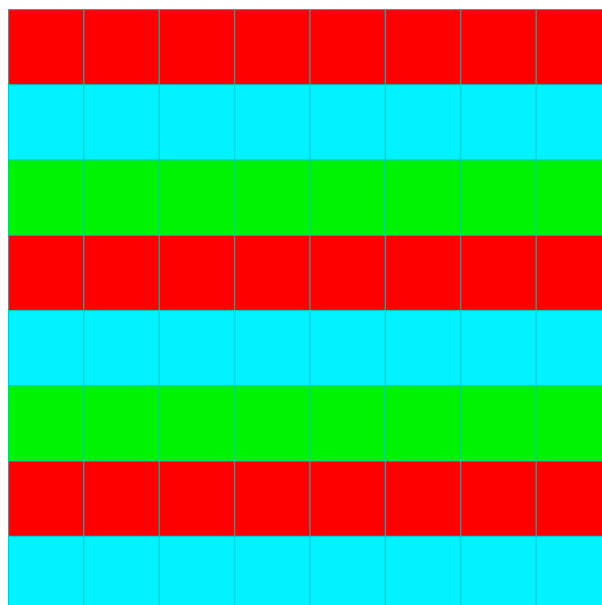
$$p(a \text{ zostaje uratowany} | a, b_1) \geq p(a \text{ zostaje uratowany} | a, b_2)$$

Wówczas wysyłanie zawsze komunikatu b_1 , gdy pionek stoi na a jest nie gorsze niż nasza obecna strategia. Tym sposobem eliminujemy parę (a, b_2) . **Wniosek (prosta indukcja) - szukając pary (B, C) dającej największe szanse na uratowanie pionka, możemy rozważać tylko takie pary (B, C), w których A jednoznacznie definiuje B.**

Zebrawszy te 2 wnioski wiemy, że w dalszych poszukiwaniach możemy zakładać następujące własności poszukiwanej pary:

- A jednoznacznie definiuje B, B jednoznacznie definiuje C, w szczególności A jednoznacznie definiuje C
- ponieważ B przyjmuje 8 wartości, C przyjmuje 8 wartości, zatem helikopter jest wysyłany na jedną z 8. predefiniowanych pozycji, konkretną pozycję możemy wybrać wysyłając B

Czyli nasze zadanie sprowadza się do jak najlepszego pokrycia szachownicy maksymalnie ośmioma kwadratami ratunku. A ma rozkład jednostajny, więc liczy się tylko to, ile kwadratów pokrywamy, a nie to, które pokrywamy. Pomalujmy rzędy naszej szachownicy na 3 kolory:



Każdy kwadrat ratunku pokrywa pola ustalonego koloru tylko w jednym rzędzie (lub wcale).

- jeśli na rząd nachodzi 1 kwadrat, to w tym rzędzie są pokryte maksymalnie 3 pola

- jeśli na rząd nachodzą 2 kwadraty, to w tym rzędzie jest pokrytych maksymalnie 6 pól
- jeśli na rząd nachodzą 3 kwadraty, to w tym rzędzie może być pokrytych wszystkie 8 pól

Ponieważ kwadratów jest tylko 8, to z zasady szufladkowej jest co najmniej jeden taki czerwony rząd i co najmniej jeden taki niebieski rząd, że w każdym z nich jest pokrytych co najwyżej 6 kwadratów, czyli co najmniej 2 są niepokryte. W sumie na całej szachownicy MUSZA być niepokryte minimum 4 pola: 2 czerwone i 2 niebieskie. Rozwiązanie niepokrywające dokładnie 4. pól przedstawiłam już powyżej. Daje ono najlepszą skuteczność helikoptera wynoszącą $15/16$.

Podsumowując:

- szukane k wynosi 4
- maksymalne prawdopodobieństwo, że pionek zostanie uratowany dla $k=3$ i jednostajnego rozkładu A wynosi $15/16$, więc $15/16$ jest największym ograniczeniem dolnym i najmniejszym ograniczeniem górnym tej wartości