

Teoria informacji, 2017/2018

Problem do samodzielnego rozwiązania. Termin: 27.01.2018.

Rozwiązania proszę przysyłać w formacie pdf na adres: niwinski@mimuw.edu.pl

Za rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 1.5 punktu.

Pionek zostaje rzucony na szachownicę 8×8 i wzywa pomocy. Gdyby miał do dyspozycji 6 bitów, mógłby dokładnie określić swoje położenie. Przypuśćmy jednak, że pionek może wysłać do centrali co najwyżej $k < 6$ bitów. Na szczęście, pionek będzie uratowany, jeśli pomoc trafi przynajmniej na jedno z sąsiednich pól (może być po skosie). Należy określić minimalne k , przy którym pionek na pewno będzie uratowany. Natomiast dla $k - 1$ należy określić szanse uratowania.

Uściślimy teraz powyższy intuicyjny opis. Położenie pionka na szachownicy jest opisywane przez zmienną losową A o wartościach w $\{1, \dots, 8\}^2$. Wołanie pionka o pomoc jest opisywane przez zmienną B o wartościach w $\{0, 1\}^k$, gdzie $k < 6$. Wreszcie, pomoc, jakiej centrala udziela pionkowi, jest opisywana przez zmienną losową C znów o wartościach w $\{1, \dots, 8\}^2$.

Zakładamy, że centrala udzielająca pomocy wie o położeniu pionka tylko tyle, ile potrafi „wydedukować” z wołania o pomoc. Ten warunek jest wyrażony przez następujące założenie.

(*) $I(A; C|B) = 0$ (równoważnie, A i C są warunkowo niezależne¹ przy danym B).

Jeśli A przyjmuje wartość (i, j) , a C wartość (i', j') , to **pionek jest uratowany**, jeśli

$$\max(|i' - i|, |j' - j|) \leq 1.$$

Polecenia zadania są następujące.

1. Znaleźć najmniejsze k , takie, że dla każdego A , istnieją B i C spełniające warunek (*) i takie, że z prawdopodobieństwem 1, pionek zostaje uratowany. Należy **uzasadnić minimalność**.
(Poprawna odpowiedź na to polecenie gwarantuje 1 punkt.)
2. Jeśli k jest wielkością znaną z poprzedniego punktu, to rozważmy $k' = k - 1$ (a więc zmienna B przyjmuje teraz wartości w $\{0, 1\}^{k-1}$). Załóżmy, że A ma rozkład jednostajny. Oszacować z dołu (najlepiej, jak ktoś potrafi) maksymalne prawdopodobieństwo, że pionek zostanie uratowany, gdzie maksimum jest brane po wszystkich B i C spełniających warunek (*).
3. To jest zadanie z gwiazdką. Podać górne oszacowanie wielkości z poprzedniego punktu lepsze niż 1.

¹Ang. A and C are conditionally independent given B , por. <https://www.mimuw.edu.pl/~niwinski/Info/2017-info.pdf>, Sect. 1.6.