

Egzamin z Teorii informacji. Zadania

23 lutego 2019

1. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że bezprefiksowa złożoność Kołmogorowa $K(n)$ spełnia nierówność

$$K(n) > \log n + \log \log n. \quad (1)$$

Czy wśród tych liczb istnieje nieskończenie wiele n postaci $n = m^2$, dla pewnej liczby naturalnej m ?

Uwaga. Za bezprefiksową złożoność Kołmogorowa liczby naturalnej uważamy taką złożoność jej przedstawienia binarnego.

2. Rozważamy zmienne losowe przyjmujące skończenie wiele wartości; $H(Z)$ oznacza entropię zmiennej Z .

Dla zmiennych X i Y , określamy dwie wielkości

$$c_1(X, Y) := \max \{H(W) : W = f(X) = g(Y) \text{ dla pewnych funkcji } f \text{ i } g\}, \quad (2)$$

$$c_2(X, Y) := \inf \{H(W) : X \text{ i } Y \text{ są warunkowo niezależne przy } W\}, \quad (3)$$

gdzie maksimum i minimum bierzemy po wszystkich zmiennych W spełniających odpowiednie warunki. Udowodnij, że

$$0 \leq c_1(X, Y) \leq I(X; Y) \leq c_2(X, Y) \leq \min \{H(X), H(Y)\}, \quad (4)$$

gdzie $I(X; Y)$ to informacja wzajemna między X i Y .

Rozwiązanie zadania 1. Niech U będzie bezprefiksową maszyną uniwersalną, względem której wyznaczamy złożoność K . Zauważmy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{K(n)}} \leq \Omega_U < 1, \quad (5)$$

bo $K(n)$ jest długością pewnego słowa w_n , że $U(w_n) = n$. Niech, dla $m \geq 1$,

$$S_m = \sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{2^{K(n)}}.$$

Przypuśćmy, że wbrew tezie zadania istnieje n_0 , że dla wszystkich $n \geq n_0$, zachodzi nierówność

$$K(n) \leq \log n + \log \log n.$$

Wtedy, dla $n_0 \leq 2^{m-1}$, mamy dla wszystkich $2^{m-1} < n \leq 2^m$,

$$\frac{1}{2^{K(n)}} \geq \frac{1}{n \log n} \geq \frac{1}{2^m m},$$

co pociąga za sobą oszacowanie

$$S_m \geq 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m}. \quad (6)$$

Oczywiście (6) jest nie do pogodzenia z (5), wobec rozbieżności szeregu $\sum \frac{1}{n}$.

Dla liczb n będących kwadratami liczby naturalnej mamy jednak lepsze oszacowanie. Istotnie, nietrudno skonstruować maszynę bezprefiksową M , która generuje $n = m^2$ ze słowa v_m , stanowiącego konkatenację słów¹

- $\text{bin}'(|\text{bin}(m)|)$ długości $\leq 2(\log \log m) + 2$,
- $\text{bin}(m)$.

Wówczas złożoność względem tej maszyny jest

$$K_M(n) \leq 2(\log \log m) + \log m + 3 = 2 \log \frac{1}{2} \log n + \frac{1}{2} \log n.$$

W konsekwencji, dla dostatecznie dużych n tej postaci mamy

$$K(n) \leq 2 \log \log n + \frac{1}{2} \log n + c < \log \log n + \log n.$$

Rozwiązanie zadania 2. Będziemy dowodzić nierówności posuwając się od lewej do prawej. Upewnijmy się najpierw, że $c_1(X, Y)$ jest dobrze określone: zmienne W spełniające warunek $W = f(X) = g(Y)$ istnieją, np. trywialna zmienna przyjmująca jedną wartość z prawdopodobieństwem 1. Dalej, mamy $H(f(X)) \leq H(X)$, więc zbiór z definicji $c_1(X, Y)$ jest ograniczony. A zatem ma supremum, które ponadto możemy zastąpić przez maksimum, bo zmiennych W o rozważanej własności jest, z dokładnością do rozkładu, skończenie wiele (jeśli X i Y przyjmują skończenie wiele wartości).

Dla każdego takiego W , mamy

$$0 \leq H(W) = I(f(X); g(Y)) \leq I(X; g(Y)) \leq I(X; Y)$$

(korzystamy tu z tzw. *data processing inequality*, por. sekcja 1.7 w Notatkach). Przechodząc do maksimum, otrzymujemy $0 \leq c_1(X, Y) \leq I(X; Y)$.

Przejdźmy teraz do nierówności dla $c_2(X, Y)$. Jeśli X i Y są niezależne względem W , to $I(X; Y|W) = 0$, a zatem $R(X; Y; W) = I(X; Y)$ i w konsekwencji

$$H(W) \geq I(X; W) = I(X; W|Y) + \underbrace{R(X; Y; W)}_{I(X; Y)} \geq I(X; Y).$$

Przechodząc do infimum, otrzymujemy $I(X; Y) \leq c_2(X, Y)$.

Wreszcie ostatnia nierówność wynika z faktu, że X i Y są wzajemnie niezależne względem X (i podobnie względem Y). Istotnie

$$I(X; Y|X) = \underbrace{H(X|X)}_0 - \underbrace{H(X|X, Y)}_0 = 0.$$

Ł. Dębowski, T. Gogacz, D. Niwiński

¹Oznaczenia jak w rozwiązaniu zadania 1 z egzaminu z 8 lutego 2019.