

Teoria informacji

kolokwium 5 grudnia 2018

1. Podaj kod Huffmana dla poniższego rozkładu.

symbol x : prawdopodobieństwo $p(x)$:

A	1/15
B	1/5
C	1/3
D	4/15
E	2/15

2. Policz przepustowość kanału danego macierzą:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dla jakiego rozkładu na wejściu jest ona osiągana?

Rozwiązanie. Łatwo policzyć, że dla pary wejścia–wyjścia (A, B) dla tego kanału, $H(B|A)$ nie zależy od rozkładu A i wynosi 1. Przyjmując, że alfabet wyjściowy jest $\{a, b, c\}$, mamy zawsze $p(B = b) = \frac{1}{2}$. Entropia $H(B)$ osiąga maksymalną wartość równą 1.5 dla $p(B = a) = p(B = c) = \frac{1}{4}$, co jest osiągalne dla A o jednostajnym rozkładzie. Przepustowość wynosi $1.5 - 1 = 0.5$.

3. Zmienna losowa A przyjmuje jako wartości liczby naturalne n od 0 do 999. Jeśli zmienna A przyjmuje wartość $n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 100$ (gdzie $a_0, a_1, a_2 \in \{0, \dots, 9\}$), to zmienna A_{02} przyjmuje wartość $a_0 + a_2 \cdot 10$, a zmienna A_1 wartość a_1 .

- (a) Zakładając, że A ma rozkład jednostajny, porównaj ze sobą liczby $I(A; A_{02})$, $I(A; A_1)$ i $I(A_{02}; A_1)$.
- (b) Które z nierówności typu $x \leq y$ z poprzedniego punktu zachodzą dla dowolnego rozkładu zmiennej A ?

Rozwiązanie. Oczywiście A_{02} i A_1 są funkcjami zmiennej A , dlatego mamy zawsze $I(A; A_{02}) = H(A_{02})$ i $I(A; A_1) = H(A_1)$, skąd $I(A_{02}; A_1) \leq I(A; A_{02}), I(A; A_1)$.

Dla rozkładu jednostajnego zmiennej A , mamy

$$0 = I(A_{02}; A_1) < \log 10 = I(A; A_1) < \log 100 = I(A; A_{02}).$$

Przy innych rozkładach A może być $I(A_{02}; A) < I(A; A_1)$, np. dla A przyjmującego jedynie wartości $0, 10, 20, \dots, 90$ z tym samym prawdopodobieństwem 0.1, mamy

$$0 = I(A; A_{02}) < \log 10 = I(A; A_1).$$

4. Dla zmiennej losowej $N : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, \max\}$ udowodnij nierówność

$$H(N) \leq -\log(1-q) - \mathbf{E} N \log q,$$

gdzie $q \in (0, 1)$, zaś $H(N)$ i $\mathbf{E} N$ to odpowiednio entropia i wartość oczekiwana zmiennej N .

Rozwiązanie. Prawą stronę możemy przedstawić

$$\begin{aligned} \sum_n p(N=n) (-\log(1-q) - n \cdot \log q) \\ \sum_n p(N=n) (-\log(1-q) q^n), \end{aligned}$$

a więc jesteśmy w sytuacji Złotego Lematu (nierówności Gibbsa) dla $x = p(N=n)$ i $y = (1-q) q^n$.