

Złożoność informacyjna (kontynuacja)

Artur Popławski
19 maja 2004

1 Przypomnienie

Liczbę Chaitina określamy:

$$\Omega =_{def} \sum_{w: M_w(\varepsilon) \downarrow} 2^{-|w|}$$

Sama liczba jest ciekawa z dwóch powodów:

1. Nie daje się skompresować
2. Jest to liczba dająca informację o wszystkich programach

2 Dlaczego to jest liczba rzeczywista ($(< \infty)$, *nawet* (< 1)) ?

Wynika to z uogólnionej nierówności Krafta.

Fakt 1. Jeśli

$$A \subseteq (0 + 1)^* \text{ jest antyłańcuchem, to: } \sum_{w \in A} 2^{-|w|} \leq 1$$

Dowód. Argument nie wprost. Przypuśćmy, że nasza liczba jest > 1 . Wtedy istnieje jakiś $A_0 \subseteq A$ skończony, taki że:

$$\sum_{w \in A_0} 2^{-|w|} > 1$$

Ale taki A_0 też jest *antyłańcuchem*, a zatem z nierówności Krafta dla przypadku skończonego

$$\sum_{w \in A_0} 2^{-|w|} \leq 1$$

Sprzeczność!

Fakt 2. Problem: dane ω , czy $M_\omega(\varepsilon) \downarrow$ redukuje się do problemu: dane n , czy $\omega_n = 1$ czy $\omega_n = 0$ w sensie Turinga? Czyli, gdybyśmy mieli na dodatkowej taśmie $\Omega = \omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots$ to moglibyśmy rozwiązać pierwszy problem, który nie jest algorytmicznie rozstrzygalny.

Dowód. Przypuśćmy, że mamy $|\omega| = n$. Obliczamy $\omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$.

Wobec tego mamy:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i * 2^{-i} + \Delta$$

Czy M_ω zatrzymuje się na ε ?

Przeszukujemy systemem przekątniowym kolejne obliczenia $M_v(\varepsilon)$ (v np. w porządku „wojskowym”) tak długo, aż znajdziemy skończony zbiór maszyn v_0 takich, że

$$\sum_{v \in V_0} 2^{-|v|} \geq \underbrace{\sum_{i=1}^n \omega_i * 2^{-i}}_{L_n}$$

lub stwierdzimy, że $M_w(\varepsilon) \downarrow$. Jeśli zachodzi pierwszy przypadek i $\omega \notin V_0$, to na pewno $M_w(\varepsilon) \uparrow$. W przeciwnym razie $(\sum_{v \in V_0} 2^{-|v|}) + 2^{-|w|}$ nie mogłaby mieć n pierwszych cyfr $\omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$.

Wniosek. Ω nie może być skompresowana bardziej niż stałą, tzn. istnieje stała c taka, że

$$\underbrace{K(\omega_1 \dots \omega_n)}_{\Omega_n} \geq n - c$$

Dlaczego tak jest?

Z definicji K istnieje takie słowo x o długości $|x| = K(\Omega_n)$, że mając x można wygenerować listę wszystkich maszyn $T_1 T_2 \dots T_{K_n}$, o $\langle T_i \rangle \leq n$, dla których $T_i(\varepsilon) \downarrow$ wraz z wynikiem $T_i(\varepsilon)$. (zastosowanie faktu 2).

Zatem moglibyśmy wygenerować pierwsze y , które nie jest żadnym z $T_i(\varepsilon)$, a zatem złożoność $K(y) > n$. Ale wygenerowaliśmy y przez x , $|x'| = \underbrace{|x|}_{K(\Omega_n)} + c$.

Zatem:

$$K(\Omega_n) + c \geq K(y) > n$$

Dowód wniosku był przeprowadzony dla K zdefiniowanego jako

$$K(w) = \min \{|x| : M_x(\varepsilon) = w\}$$

3 Złożoność Kolmogorowa w terminach oryginalnej definicji (funkcja C).

Problem: na ogół $\neg K(w | u) \leq K(w)$

Definicja. Dla $x \in (0+1)^*$, $\bar{x}$ delimitowana wersja x : przypuśćmy, że $a_k 0 a_{k-1} 0 \dots a_1 0 a_0 1 x$ binarne przedstawienie $|x|$:

$\bar{x} =_{def} a_k 0 a_{k-1} 0 \dots a_1 0 a_0 1 x$, gdzie $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ binarne przedstawienie liczby $|x|$.

Jest to zapis umożliwiający zawarcie długości x przed jego wartością. Warto zauważyć, że z $\bar{x}y$ potrafimy odtworzyć x i y .

Parę określamy następująco:

$$\langle x, y \rangle =_{def} 00\bar{x}y.$$

Dodatkowo zauważmy, że

$$|\langle x, y \rangle| = |x| + |y| + 2 \log_2 |x| + O(1)$$

Ustalmy maszynę (uniwersalną) U taką, że

$$U(\langle u, \langle z, x \rangle \rangle) = M_z(\langle u, x \rangle)$$

Określamy $\varphi_0(w) = U(w)$.

Dla dowolnej funkcji częściowo obliczalnej φ określamy

$$C_\varphi(w | n) = \min \{|x| : \varphi(\langle u, x \rangle) = w\}$$

$$C = C_{\varphi_0}$$

Przyjmujemy, że $C_\varphi(w) =_{def} C_\varphi(w | \varepsilon)$.

Twierdzenie (o niezmienniczości). Dla dowolnej funkcji częściowo obliczalnej

$$C(w | n) \leq C_\varphi(w | n) + C_\varphi$$

Dowód. ρ jest obliczane przez pewną maszynę M_{z_1} , w szczególności

$$\varphi(\langle u, y \rangle) = M_{z_1}(\langle u, y \rangle).$$

Mamy x_0 takie, że

$$C_\varphi(w|u) = |x_0|, \quad \varphi(\langle u, x_0 \rangle) = w$$

Zatem:

$$w = M_{z_1}(\langle u, x_0 \rangle) = U(\langle u, \langle z_1, x_0 \rangle \rangle) = \varphi_0(\langle u, \langle z_1, x_0 \rangle \rangle)$$

$$|\langle z_1, x_0 \rangle| = \underbrace{2\log(|z_1|) + O(1) + |z_1|}_{C\varphi} + \underbrace{|x_0|}_{C\varphi(w|u)} \geq C(w|u)$$