Instytut Informatyki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Marcin Jurdziński

O złożoności obliczeniowej gier na grafach

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
dr Damiana Niwińskiego

Warszawa, czerwiec 1997

Spis rzeczy

Podziękowania

Przede wszystkim pragnę podziękować moim Rodzicom za wychowanie i miłość oraz mojemu Bratu za to, że zawsze mogłem na niego liczyć.

Prof. Jerzy Tiuryn był moim opiekunem naukowym przez 4 lata mojej edukacji na Uniwersytecie Warszawskim. Dzięki wolności jaką mi dawał oraz unikalnej atmosferze koleżeńskości jaka panowała w jego grupie były to pasjonujące studia, dające możliwości wszechstronnego rozwoju. Dr Damian Niwiński i dr Igor Walukiewicz dali mi fantastyczną okazję do spróbowania swoich sił w pracy badawczej, podsuwając ciekawe problemy i aktywnie uczestnicząc w każdym moim kroku na polu informatyki teoretycznej. Bez ich pomocy i opieki praca ta nigdy by nie powstała. Mój kolega Stefan Dziembowski był dla mnie niejednokrotnie silnym oparciem. Jego humor i towarzyskość dawały mi wiele radości i okazji do śmiechu.

Dr Krzysztof Diks, prof. Andrzej Tarlecki i prof. Paweł Urzyczyn byli dla mnie wzorem i nie szczędzili słów otuchy w chwilach mojego zwątpienia. Wszyscy moi koledzy i koleżanki związani z Zakładem Logiki Stosowanej stanowili zgraną grupę w której bardzo przyjemnie było spędzać czas zarówno w pracy jak i w zabawie. Mam tu na myśli m.in.: Marcina Benke, Jacka Chrząszcza, Grzesia Grudzińskiego, Mikołaja Konarskiego, Sławka Leszczyńskiego, Zbyszka Łukasiaka, Roberta Marona, Aleksego Schuberta, Darię Walukiewicz, Adama Wierzbickiego.

Część tej pracy powstała w trakcie mojego pobytu w ośrodku BRICS (Basic Research in Computer Science) na Uniwersytecie w Aarhus w Danii, finansowanego przez BRICS oraz polsko–duński program wymiany studentów.

Wstęp

W tej pracy zajmujemy się problemem wyznaczania strategii w pewnego rodzaju dwuosobowych grach rozgrywanych na grafach. Interesować nas będą zagadnienia *determinacji* gier, złożoności strategii wygrywających (w sensie rozmiaru *pamięci* potrzebnej do ich realizacji) oraz *złożoności obliczeniowej* problemów *wyznaczania zwycięzcy* oraz *syntezy strategii*.

Wielu autorów rozważało różne wersje gier rozgrywanych na skończonych lub nieskończonych grafach [4, 9, 10, 7, 16, 15, 11, 20, 21, 17, 3]. Celem naszej pracy jest podanie jak najściślejszych górnych ograniczeń na złożoność problemów wyznaczania zwycięzcy oraz syntezy strategii w grach Mostowskiego [7, 16] i grach McNaughtona [9, 15, 21].

Problem wyznaczania zwycięzcy w grach Mostowskiego jest równoważny obliczeniowo (ze względu na redukcje w czasie wielomianowym) problemowi *weryfikacji formuły względem modelu* w *modalnym rachunku* μ [8]. Rachunek μ jest bardzo wyrażalną logiką programów stosowaną do specyfikacji własności systemów współbieżnych i reagujących. Automatyczna weryfikacja własności programów wymaga zaprojektowania efektywnych algorytmów weryfikacji formuły w modelu. Dotychczas znane było górne ograniczenie NP $\cap$ co-NP na złożoność obliczeniową tego problemu. W tej pracy wykazujemy, że problem ten należy do klasy złożoności UP $\cap$ co-UP. Wynik ten uzyskujemy przez wskazanie redukcji gier Mostowskiego do gier Ehrenfeuchta-Mycielskiego.

Problem syntezy strategii w grach McNaughtona można traktować jako problem automatycznej syntezy programów reagujących [19, 18, 11, 14, 20, 12]. Za pomocą warunków wygrywających w grach McNaughtona można bowiem wyrażać pewne własności systemów reagujących (na przykład żywotność). Jeden z graczy odgrywa w takiej specyfikacji rolę *kontrolera* a drugi rolę *środowiska*. Strategia wygrywająca dla kontrolera odpowiada w tej metaforze programowi kontrolera, gwarantującemu spełanianie warunku poprawnościowego zawartego w specyfikacji. Wiadomo było dotychczas, że w grach McNaughtona istnieją strategie wygrywające o skończonej pamięci. W tej pracy przeprowadzamy szczegółową analizę rozmiaru pamięci wystarczającej w strategiach wygrywających. Uzyskane ograniczenie górne jest w pewnym sensie optymalne [3] i uogólnia wyniki Lescowa [11, 12] oraz Nerode'a, Remmela i Yakhnisa [17].

Górne ograniczenie na rozmiar pamięci przedstawione w rozdziale 2 zostało uzyskane we wspólnej pracy z dr Igorem Walukiewiczem. Wyniki zawarte w rozdziałach 2 i 3 zostały przedstawione w pracy [3].

Rozdział 1

Gry na grafach

Będziemy zajmowali się klasą gier dwuosobowych z pełną informacją. Dwaj gracze 0 i 1 rozgrywają je na grafach dwudzielnych zwanych *arenami*.

Definicja 1 (Arena) *Arena* $\mathcal{A} = (V, V_0, V_1, E)$ jest skierowanym grafem dwudzielnym (V, E). Zbiór V nazywamy zbiorem *pozycji* areny, $V_0 \cup V_1 = V$ jest podziałem zbioru V na pozycje gracza 0 i 1 odpowiednio, a $E = E_0 \cup E_1$ jest zbiorem dozwolonych *przejść*, gdzie $E_0 \subseteq V_0 \times V_1$ są dozwolonymi przejściami gracza 0, a $E_1 \subseteq V_1 \times V_0$ są dozwolonymi przejściami gracza 1. Zakładamy, że w grafie (V, E) dla każdej pozycji $v \in V$ istnieje co najmniej jedna pozycja $u \in V$ taka, że $(v, u) \in E$, tj. z każdej pozycji można wykonać co najmniej jedno przejście.

Definicja 2 (Podarena) Niech $\mathcal{A} = (V, V_0, V_1, E)$ będzie areną. Zbiór $W \subseteq V$ będziemy nazywać *podareną* areny $\mathcal{A}$, jeśli $\big(W, V_0 \cap W, V_1 \cap W, E \cap (W \times W)\big)$ jest areną, tj. dla każdej pozycji $v \in W$ istnieje co najmniej jedna pozycja $u \in W$ taka, że $(v, u) \in E$.

Definicja 3 (Pułapka) Niech $\mathcal{A} = (V, V_0, V_1, E)$ będzie areną. Zbiór $U \subseteq V$ nazywamy *pułapką dla gracza* i ($i = 0, 1$), jeśli dla każdej pozycji $v \in U$ zachodzą warunki

1. jeśli $v \in V_i$ to dla każdego $u \in V_{1-i}$ takiego, że $(v, u) \in E$ zachodzi $u \in U$,
2. jeśli $v \in V_{1-i}$ to istnieje $u \in V_i \cap U$ taki, że $(v, u) \in E$.

Zauważmy, że wprost z definicji pułapki wynika następujący fakt.

Fakt 4 Każdy podzbiór pozycji areny będący pułapką (dla dowolnego z graczy) jest podareną.

Rozgrywka w grze na grafie rozpoczyna się w pewnej *pozycji początkowej* $v_0 \in V$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $v_0 \in V_0$ (jeśli $v_0 \in V_1$ to w poniższym opisie wystarczy zamienić rolami graczy 0 i 1). Wtedy pierwszy ruch wykonuje gracz 0 wybierając pewne dozwolone przejście $(v_0, v_1) \in E_0$. Następnie ruch wykonuje gracz 1 wybierając pewne dozwolone przejście $(v_1, v_2) \in E_1$. Obaj gracze wykonują ruchy w ten sposób na przemian i grają potencjalnie w nieskończoność. W wyniku powstaje (nieskończona) *rozgrywka* $\pi = \langle v_0, v_1, v_2, \ldots \rangle$, czyli (nieskończona) ścieżka w grafie areny.

Aby w pełni określić grę $\mathcal{G}$ na grafie należy zadać arenę $\mathcal{A} = (V, V_0, V_1, E)$ wraz z *warunkiem wygrywającym* $\Phi \subseteq V^* \cup V^\omega$ określającym zbiór rozgrywek (skończonych lub nieskończonych) w których wygrywa gracz 0 (w pozostałych rozgrywkach wygrywa gracz 1).

Strategia dla gracza 0 jest funkcją[1], która na podstawie dotychczasowego przebiegu rozgrywki określa jakie dozwolone przejście powinien wybrać gracz 0 w bieżącej pozycji. Powiemy, że strategia taka jest *wygrywająca* dla gracza 0 z pozycji $v \in V$, gdy w każdej rozgrywce rozpoczynającej się w v gracz 0 wygrywa o ile tylko wykonuje wszystkie swoje ruchy zgodnie ze strategią (niezależnie od tego jak gra gracz 1).

Zbiorem wygrywającym gracza 0 w grze $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, \mathcal{F})$ nazywamy zbiór wierzchołków areny $\mathcal{A}$ z których istnieje strategia wygrywająca dla gracza 0.

Pojęcie strategii sformalizujemy definiując *strategie z pamięcią*.

Definicja 5 (Strategia z pamięcią) Niech $\mathcal{A} = (V, V_0, V_1, E)$ będzie areną. *Strategia z pamięcią* M dla gracza 0 w grze $\mathcal{G}$ na arenia $\mathcal{A}$ jest trójką (M, ζ, M_I), gdzie M jest zbiorem *stanów* pamięci, $M_I \subseteq M$ jest wyróżnionym zbiorem *stanów początkowych*, a $\zeta : M \times V_0 \rightharpoonup M \times V_1$ jest częściową funkcją. Funkcja ζ spełnia następujący warunek: jeśli $\zeta(m, v) = (m', v')$ to dla każdego $v'' \in V_0$ takiego, że $(v', v'') \in E$ para (m', v'') należy do dziedziny ζ.

Niech $v_0 \in V_0$. Powiemy, że rozgrywka $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots \rangle$ jest *zgodna* ze strategią ζ jeśli istnieje ciąg stanów pamięci $\langle m_0, m_1, m_2, \ldots \rangle$ taki, że $m_0 \in M_I$, $(m_{2n+1}, v_{2n+1}) = \zeta(m_{2n}, v_{2n})$ oraz $m_{2n+2} = m_{2n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $v_0 \in V_1$ to spełnione muszą być analogiczne warunki: $(m_{2n+2}, v_{2n+2}) = \zeta(m_{2n+1}, v_{2n+1})$ oraz $m_{2n+1} = m_{2n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

[1] Analogicznie definiujemy strategię i inne pojęcia dla gracza 1.

Strategia jest *wygrywająca dla gracza 0 z pozycji* $v \in V_0$ jeśli istnieje $m_0 \in M_I$ takie, że para (m_0, v) należy do dziedziny ζ, oraz każda rozgrywka rozpoczynająca się od tej pary i zgodna ze strategią ζ jest wygrywająca dla gracza 0. Strategia jest wygrywająca dla gracza 0 z pozycji $v \in V_1$ jeśli jest wygrywająca z każdego $v' \in V_0$ takiego, że $(v, v') \in E$.

Powiemy, że strategia jest *wygrywająca dla gracza 0 ze zbioru* $W \subseteq V$ jeśli jest wygrywająca dla 0 z każdej pozycji $v \in W$.

W szczególności, przyjmując jako pamięć M zbiór $\mathcal{H} \subseteq (V_0 \times V_1)^* \cup V_1 \times (V_0 \times V_1)^*$ wszystkich skończonych rozgrywek (*historii*) w których ostatni ruch wykonał gracz 1, a jako jedyny stan początkowy rozgrywkę pustą, otrzymujemy pojęcie strategii zależnej od całej dotychczasowej historii rozgrywki. Zbiór $\mathcal{H}$ jest jednak nieskończony, więc taka strategia stanowi nieskończony obiekt, nawet jeśli arena jest skończona.

Na przeciwnym biegunie złożoności znajdują się strategie w których pamięć M jest zbiorem jednoelementowym. Takie strategie nazywamy *strategiami bez pamięci* (albo *strategiami pozycyjnymi*), ponieważ następny ruch do wykonania przez gracza grającego zgodnie z taką strategią nie zależy w ogóle od historii rozgrywki, a tylko od aktualnej pozycji.

Następujący prosty fakt wyjaśnia nazwę *pułapka*.

Fakt 6 Niech $\mathcal{A} = (V, V_0, V_1, E)$ będzie areną a $U \subseteq V$ pułapką dla gracza i. Wtedy gracz $(1-i)$ ma ze zbioru U strategię bez pamięci, by rozegrać nieskończoną rozgrywkę wewnątrz zbioru U (tj. uniemożliwić wyjście rozgrywki poza zbiór U).

Dowód

Z definicji pułapki dla gracza i wiemy, że dla każdej pozycji $v \in V_{1-i} \cap U$ możemy wybrać pozycję $u_v \in V_i \cap U$. Strategię bez pamięci $\zeta : V_{1-i} \cap U \to V_i \cap U$ dla gracza $(1-i)$ definiujemy przez $\zeta(v) = u_v$. Każda rozgrywka rozpoczynająca się w pozycji ze zbioru U zgodna ze strategią ζ toczy się w nieskończoność wewnątrz zbioru U, ponieważ z punktu 1 definicji pułapki dla gracza i wynika, że nie może on nigdy wykonać ruchu poza zbiór U. $\square$

W grach nieskończonych, którymi zajmujemy się w tej pracy warunki wygrywające utożsamiają rozgrywki różniące się tylko na skończonej liczbie pozycji. Jeśli takie gry są *zdeterminowane*, tj. z każdej pozycji areny jeden z graczy ma strategię wygrywającą, to łatwo można pokazać następujący fakt.

Fakt 7 Zbiór wygrywający W_i dla gracza i ($i = 0, 1$) jest pułapką dla gracza $(1 - i)$, a strategia wygrywająca dla gracza i uniemożliwia graczowi $(1 - i)$ wyprowadzenie rozgrywki poza zbiór wygrywający dla gracza i.

Dowód
Gdyby zbiór wygrywający dla gracza i nie był pułapką dla gracza $(1 - i)$, to w W_i istniałaby pozycja v z której gracz $(1 - i)$ mógłby wymusić na graczu i przejście do zbioru $V \setminus W_i = W_{1-i}$ (ostatnia równość wynika z determinacji gier). To by jednak oznaczało, że gracz $(1 - i)$ ma strategię wygrywającą z pozycji v, bo po dojściu do pozycji $u \in W_{1-i}$ może już grać zgodnie ze strategią wygrywającą dla siebie, a skończona częśc rozgrywki w której wymusza przejście do zbioru W_{1-i} nie wpływa na wynik całej nieskończonej rozgrywki.

Podobnie, strategia wygrywająca dla gracza i ze zbioru W_i uniemożliwia graczowi $(1-i)$ wyprowadzenie rozgrywki do zbioru $V \setminus W_i = W_{1-i}$ bo inaczej nie byłaby wygrywająca dla gracza i. $\square$

1.1 Gry atrakcyjne

Definicja 8 (Gra atrakcyjna) *Gra atrakcyjna* $\mathcal{G}$ jest zadana przez czwórkę $(\mathcal{A}, W, T, i)$, gdzie $\mathcal{A} = (V, V_0, V_1, E)$ jest areną, $W \subseteq V$ jest podareną areny $\mathcal{A}$, $T \subseteq V$ jest dowolnym podzbiorem pozycji areny $\mathcal{A}$, a $i = 0$ lub 1 jest numerem gracza.

Rozgrywka $\pi = \langle v_0, v_1, v_2, \ldots \rangle$ w grze atrakcyjnej $\mathcal{G}$ jest skończona ($\pi = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$) jeśli zachodzi jeden z warunków

1. $v_k \in T$ oraz dla $l = 0, \ldots, k-1$ mamy $v_l \in W \setminus T$, tj. rozgrywka tocząc się wewnątrz zbioru W odwiedziła zbiór T,

2. $v_k \in V_i \cap (V \setminus W)$ oraz dla $l = 0, \ldots, k - 1$ mamy $v_l \in W \setminus T$, tj. gracz $(1 - i)$ wykonał ruch poza zbiór W zanim rozgrywka odwiedziła zbiór $T \cap W$,

3. $v_k \in V_{1-i} \cap (V \setminus W)$ oraz dla $l = 0, \ldots, k-1$ mamy $v_l \in W \setminus T$, tj. gracz i wykonał ruch poza zbiór W zanim rozgrywka odwiedziła zbiór $T \cap W$.

Rozgrywka π jest nieskończona, jeśli dla każdego $l \in \mathbb{N}$ mamy $v_l \in W \setminus T$. Gracz i wygrywa rozgrywkę π jeśli jest ona skończona i zachodzi przypadek 1 lub 2, w przeciwnym razie zwycięża gracz $(1 - i)$.

Inaczej mówiąc, gracz i ma strategię wygrywającą w grze atrakcyjnej $\mathcal{G}$ jeśli może w skończonej liczbie kroków zmusić gracza $(1-i)$ do odwiedzenia pozycji ze zbioru $T \cap W$ nie wychodząc poza zbiór W (zbiór W stanowi podarenę, więc obaj gracze mogą zawsze wykonać ruch do zbioru W; wykonanie przez gracza ruchu poza zbiór W oznacza dla niego poddanie rozgrywki walkowerem). Z kolei gracz $(1-i)$ ma strategię wygrywającą, jeśli potrafi w nieskończonośc utrzymywać rozgrywkę tylko na pozycjach ze zbioru $W \setminus T$.

1.2 Gry McNaughtona

Gry McNaughtona są rozgrywane zawsze w nieskończoność na arenach pokolorowanych skończoną liczbą kolorów.

Definicja 9 (Pokolorowana arena) *Arena pokolorowana kolorami z C* to trójka $(\mathcal{A}, C, \chi)$, gdzie $\mathcal{A} = (V, V_0, V_1, E)$ jest areną, C *skończonym* zbiorem *kolorów* a $\chi : V \rightharpoonup C$ częściową *funkcją kolorującą.*

Definicja 10 (Gra McNaughtona) Gra McNaughtona $\mathcal{G}$ jest zadana przez parę $\big((\mathcal{A}, C, \chi), \mathcal{F}\big)$, gdzie $(\mathcal{A}, C, \chi)$ jest *areną pokolorowaną kolorami z C* a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(C)$ jest *warunkiem wygrywającym* dla gracza 0.

Dla nieskończonej rozgrywki $\pi = \langle v_0, v_1, v_2, \ldots \rangle$ w grze McNaughtona $\mathcal{G}$ przez $\mathrm{Inf}(\pi)$ będziemy oznaczać zbiór kolorów występujących nieskończenie często w ciągu $\langle \chi(v_0), \chi(v_1), \chi(v_2), \ldots \rangle$. Nieskończoną rozgrywkę π *wygrywa* gracz 0 jeśli $\mathrm{Inf}(\pi) \in \mathcal{F}$. W przeciwnym razie zwycięzcą zostaje gracz 1.

W rozdziale 2 wykazujemy, że gry McNaughtona są *zdeterminowane*, tj. że z każdej pozycji areny jeden z graczy ma strategię wygrywającą. Dowód jest konstruktywny a definiowane w nim strategie wygrywające są strategiami ze skończoną pamięcią. Szczegółowa analiza rozmiaru pamięci wystarczającej dla strategii wygrywających w grach McNaughtona przeprowadzona w rozdziale 2 posłuży w rozdziale 3 do określenia górnej granicy na złożoność obliczeniową problemów wyznaczania zwycięzcy i syntezy strategii.

1.3 Gry Mostowskiego

Definicja 11 (Gra Mostowskiego) *Gra Mostowskiego* $\mathcal{G}$ jest zadana przez arenę $\mathcal{A} = (V, V_0, V_1, E)$ oraz funkcję $p : V \to \{0, 1, \ldots, |V|\}$ przypisującą każdej pozycji areny *priorytet* będący liczbą naturalną.

Niech $\pi = \langle v_0, v_1, v_2, \ldots \rangle$ będzie nieskończoną rozgrywką w grze Mostowskiego. Przez $\mathrm{Inf}(\pi)$ oznaczamy zbiór liczb naturalnych występujących nieskończenie często w ciągu $\langle p(v_0), p(v_1), p(v_2), \ldots \rangle$. Rozgrywka π jest wygrywająca dla gracza 0 jeśli $\max(\mathrm{Inf}(\pi))$ jest liczbą parzystą. W przeciwnym razie zwycięzcą jest gracz 1.

Gry Mostowskiego można przedstawić jako szczególny przypadek gier McNaughtona. Odpowiadają one grom McNaughtona w których warunek wygrywający daje się przedstawić (bez zmiany areny) w pewnej szczególnej postaci, zwanej *łańcuchowym warunkiem Rabina*. Z dowodu determinacji gier McNaughtona przedstawionego w rozdziale 2 wynika jako szczególny przypadek fakt, że w grach z łańcuchowym warunkiem Rabina obaj gracze mają na swych zbiorach wygrywających strategie wygrywające bez pamięci. Determinację gier Mostowskiego wraz z istnieniem strategii bez pamięci wykazali niezależnie Mostowski [16] oraz Emerson i Jutla [7].

1.4 Gry Ehrenfeuchta-Mycielskiego

Definicja 12 (Gra Ehrenfeuchta-Mycielskiego) *Gra Ehrenfeuchta-Mycielskiego* $\mathcal{G}$ jest zadana przez arenę $\mathcal{A} = (V, V_0, V_1, E)$ oraz trójkę (c, w, ν), gdzie $c \in \mathbb{N}$ jest liczbą naturalną, $w : E \to \{-c, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, c\}$ jest funkcją przypisującą każdemu przejściu areny *wagę* będącą liczbą całkowitą a $\nu \in \mathbb{Q}$ jest liczbą wymierną.

Niech $\pi = \langle v_0, v_1, v_2, \ldots \rangle$ będzie nieskończoną rozgrywką. Rozgrywkę π wygrywa gracz 0 jeśli

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w\big((v_{i-1}, v_i)\big) \geq \nu.$$

W przeciwnym razie zwycięża gracz 1.

1.5 Gry Zwicka-Patersona

Definicja 13 (Gra Zwicka-Patersona) Niech $\mathcal{G}$ będzie grą Eherenfeuchta-Mycielskiego oraz niech $0 < \lambda < 1$ będzie liczbą rzeczywistą. Arena oraz funkcja wagi gry Zwicka-Patersona $\mathcal{G}_\lambda$ są takie same jak w grze $\mathcal{G}$. Inny jest tylko warunek wygrywający: rozgrywkę $\pi = \langle v_0, v_1, v_2, \ldots \rangle$ wygrywa gracz 0 jeśli

$$\liminf_{n \to \infty} (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \cdot w\big((v_{i-1}, v_i)\big) \geq \nu.$$

W przeciwnym razie zwycięża gracz 1.

Rozdział 2

Ile wystarczy pamiętać, żeby wygrać?

W tym rozdziale przedstawimy oszacowanie rozmiaru pamięci wystarczającej dla strategii wygrywających w grach McNaughtona. Oszacowanie to posłuży do określenia górnego ograniczenia na złożoność obliczeniową problemów *wyznaczania zwycięzcy* oraz *syntezy strategii*.

Omówimy również znaczenie uzyskanego górnego ograniczenia na rozmiar pamięci w teorii automatów na nieskończonych drzewach oraz dla automatycznej syntezy programów. Naśladując pracę W. Zielonki [21] będziemy się tutaj zajmowali ogólnym przypadkiem, w którym areny mogą być nieskończone. Badając złożoność obliczeniową gier McNaughtona interesujemy się tylko arenami skończonymi, lecz zastosowania gier do problemu uzupełnienia automatów na nieskończonych drzewach wymagają rozpatrywania gier na nieskończonych arenach.

Zanim przejdziemy do analizy złożoności strategii wygrywających w grach McNaughtona zajmiemy się prostszym przypadkiem gier atrakcyjnych. Wykażemy, że gry atrakcyjne są zdeterminowane oraz, że obaj gracze mają na swoich zbiorach wygrywających strategie wygrywające bez pamięci. Z tych wyników oraz z innych własności zbiorów wygrywających (*atraktorów* i *pułapek*) w grach atrakcyjnych będziemy korzystać w dowodzie twierdzenia o determinacji ze skończoną pamięcią dla gier McNaughtona.

2.1 Gry atrakcyjne

Definicja 14 (Atraktor) Niech $\mathcal{A} = (V, V_0, V_1, E)$ będzie areną. Zdefiniujemy *atraktor zbioru* $T \subseteq V$ *dla gracza* i *(*$i = 0, 1$*) w podarenie* $W \subseteq V$ (ozn. $\mathrm{Attr}_i^W(T)$) w następujący sposób. Konstruujemy przez indukcję pozaskończoną niemalejący ciąg $T_0, T_1, T_2, \ldots$ zbiorów pozycji areny

- $T_0 = T \cap W$,
- $$\begin{aligned} T_{\xi+1} = T_\xi & \\ &\cup \{v \in V_i \cap W &&: \text{istnieje pozycja } u \in T_\xi \text{ taka, że } (v,u) \in E\} \\ &\cup \{v \in V_{1-i} \cap W &&: \text{dla każdej pozycji } u \in V, \\ & && \quad \text{jeśli } (v,u) \in E \text{ to zachodzi } u \in T_\xi\}, \end{aligned}$$
- jeśli ξ jest graniczną liczbą porządkową, to niech $T_\xi = \bigcup_{\rho<\xi} T_\rho$.

Przyjmijmy $\mathrm{Attr}_i^W(T) = \bigcup_\xi T_\xi$.

Fakt 15 Niech $\mathcal{A} = (V, V_0, V_1, E)$ będzie areną, $W \subseteq V$ podareną $\mathcal{A}$ oraz $T \subseteq V$ podzbiorem pozycji areny $\mathcal{A}$. Zbiór $\mathrm{Attr}_i^W(T)$ ma następujące własności

1. Zbiór $W \setminus \mathrm{Attr}_i^W(T)$ jest pułapką dla gracza i w podarenie W, więc jest jednocześnie podareną.
2. Gracz $(1-i)$ ma strategię wygrywającą bez pamięci ze zbioru $W \setminus \mathrm{Attr}_i^W(T)$ w grze atrakcyjnej $(\mathcal{A}, W, T, i)$.
3. Gracz i ma strategię wygrywającą bez pamięci ze zbioru $\mathrm{Attr}_i^W(T)$ w grze atrakcyjnej $(\mathcal{A}, W, T, i)$.

Dowód
Wprowadźmy następujące oznaczenia: niech $A = \mathrm{Attr}_i^W(T)$ oraz $\overline{A} = W \setminus A$.

1. Wykażemy, że $\overline{A}$ jest pułapką dla gracza i w podarenie W. Wiadomo, że dla każdej pozycji $v \in \overline{A}$ istnieje pozycja $u \in W$ dla której $(v,u) \in E$, bo W jest podareną.

   Niech $v \in V_i \cap \overline{A}$. Gdyby istniała pozycja $u \in A$ dla której $(v,u) \in E$, to z definicji atraktora byłoby, że $v \in A$. Stąd wynika, że

   $$\text{dla każdego } u \in W, \text{ jeśli } (v,u) \in E, \text{ to } u \in \overline{A}. \tag{2.1}$$

Niech $v \in V_{1-i} \cap \overline{A}$. Gdyby dla każdej pozycji $u \in W$ takiej, że $(v,u) \in E$ zachodziło $u \in A$, to wtedy z definicji atraktora byłoby, że $v \in A$. Stąd wynika, że

$$\text{istnieje } u \in \overline{A}, \text{ takie, że } (v,u) \in E. \tag{2.2}$$

Z 2.1 i 2.2 wynika, że zbiór $\overline{A}$ jest pułapką dla gracza i w podarenie W, więc w szczególności jest też podareną.

2. Istnienie strategii wygrywającej bez pamięci dla gracza $(1-i)$ ze zbioru $\overline{A}$ w podarenie W wynika wprost z faktu, że $\overline{A}$ jest pułapką dla gracza i w podarenie W. Strategia ta polega na wybieraniu w każdej pozycji $v \in \overline{A} \cap V_{1-i}$ pewnego przejścia $(v,u) \in E$ takiego, że $u \in \overline{A}$. Istnienie takiego przejścia dla każdej pozycji $v \in \overline{A} \cap V_{1-i}$ wynika z punktu 2 definicji pułapki. Może się tak zdarzyć, że gracz i opuści zbiór W; wtedy rozgrywka jest skończona i wygrywa gracz $(1-i)$, bo zachodzi przypadek 3 z definicji gry atrakcyjnej $(\mathcal{A}, W, T, i)$.

3. Niech $v \in A$. Przez μ_v będziemy oznaczać najmniejszą liczbę porządkową ν, dla której zachodzi $v \in T_\nu$. Z definicji atraktora wynika, że dla każdego $v \in (A \setminus T) \cap V_i$ istnieje $u \in A \cap V$ takie, że $(v,u) \in E$, oraz $\mu_u < \mu_v$. Wybierając dla każdego $v \in (A \setminus T) \cap V_i$ jedno takie $u \in V$ definiujemy strategię bez pamięci $\eta : (A \setminus T) \cap V_i \to A \cap V_{1-i}$ przez $\eta(v) = u$. Z definicji atraktora wynika też, że dla każdego $v \in A \cap V_{1-i}$ oraz każdego $u \in W$ takiego, że $(v,u) \in E$ zachodzi $\mu_u < \mu_v$. Rozgrywka zgodna ze strategią η gwarantuje zatem zmniejszanie w każdym kroku liczby μ_v.

   Niech $\pi = \langle v_0, v_1, v_2, \ldots \rangle$ będzie rozgrywką zgodną ze strategią η. Jeśli dla pewnego $l \in \mathbb{N}$ zachodzi $v_l \notin W$, to musi być, że $v_l \in V_i$ (bo gracz i zgodnie ze strategią η nie może opuścić zbioru W), czyli wygrywa gracz i. Jeśli natomiast dla każdego $l \in \mathbb{N}$ mamy $v_l \in W$, to istnieje $k \in \mathbb{N}$, dla którego $v_k \in T_0 = T \cap W$, ponieważ ciąg $\langle \mu_{v_0}, \mu_{v_1}, \mu_{v_2}, \ldots \rangle$ jest malejący a liczby porządkowe są dobrze ufundowane.

□

2.2 Gry McNaughtona

Niech $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(C)$ będzie warunkiem wygrywającym oraz $D \subseteq C$. Przez $\mathcal{F} \upharpoonright D \subseteq \mathcal{P}(D)$ będziemy oznaczać warunek wygrywający $\{D' \in \mathcal{F} : D' \subseteq D\}$.

Definicja 16 (Drzewo Zielonki) *Drzewo Zielonki warunku* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(C)$ będziemy oznaczać przez $\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}$. Definiujemy je przez indukcję ze względu na liczbę elementów zbioru C.

1. Korzeń drzewa $\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}$ etykietujemy zbiorem C.
2. Załóżmy, że $C \in \mathcal{F}$. Niech $C_0, C_1, \ldots, C_{k-1}$ będą wszystkimi maksymalnymi zbiorami należącymi do $\{C' \subseteq C : C' \notin \mathcal{F}\}$. Wtedy do korzenia dołączamy (jako poddrzewa) drzewa Zielonki $\mathcal{D}_{\mathcal{F}\upharpoonright C_i, C_i}$ dla $i = 0, 1, \ldots, k-1$.
3. Załóżmy, że $C \notin \mathcal{F}$. Niech $C_0, C_1, \ldots, C_{k-1}$ będą wszystkimi maksymalnymi zbiorami należącymi do $\{C' \subseteq C : C' \in \mathcal{F}\}$. Wtedy do korzenia dołączamy (jako poddrzewa) drzewa Zielonki $\mathcal{D}_{\mathcal{F}\upharpoonright C_i, C_i}$ dla $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Definicja 17 Niech $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(C)$ będzie warunkiem wygrywającym, a niech $\mathcal{D}_{\mathcal{F}\upharpoonright C_0, C_0}, \ldots, \mathcal{D}_{\mathcal{F}\upharpoonright C_{k-1}, C_{k-1}}$ będą poddrzewami przyczepionymi do korzenia drzewa $\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}$. Dla $i = 0, \ldots, k-1$ przez $\mathcal{F}_i$ oznaczamy warunek $\mathcal{F} \upharpoonright C_i \subseteq \mathcal{P}(C_i)$. Definiujemy liczbę $m_{\mathcal{F}}$ następująco.

$$m_{\mathcal{F}} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \mathcal{D}_{\mathcal{F},C} \text{ nie ma poddrzew,} \\ \max\{m_{\mathcal{F}_0}, \ldots, m_{\mathcal{F}_{k-1}}\} & \text{jeśli } C \notin \mathcal{F}, \\ \sum_{i=0}^{k-1} m_{\mathcal{F}_i} & \text{jeśli } C \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

Przez $M_{\mathcal{F}}$ będziemy zwykle oznaczać skończony zbiór $\{1, \ldots, m_{\mathcal{F}}\}$, lub czasami inny zbiór równoliczny.

Fakt 18 Dla każdego warunku wygrywającego $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(C)$ zachodzą nierówności

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{F}} &\leq ||\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}|| && (2.3) \\ m_{\overline{\mathcal{F}}} &\leq ||\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}|| && (2.4) \\ ||\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}|| &\leq |C|! && (2.5) \end{aligned}$$

gdzie $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{F}$, a $||\mathcal{D}||$ to liczba liści w drzewie $\mathcal{D}$.

Dowód
Nierówność (2.3) dowodzi się przez indukcję ze względu na budowę drzewa Zielonki $\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}$

$$m_{\mathcal{F}} \leq \sum_{i=0}^{k-1} m_{\mathcal{F}\upharpoonright C_i} \leq \sum_{i=0}^{k-1} ||\mathcal{D}_{\mathcal{F}\upharpoonright C_i, C_i}|| < ||\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}||$$

gdzie $\mathcal{D}_{\mathcal{F}\upharpoonright C_0,C_0}, \ldots, \mathcal{D}_{\mathcal{F}\upharpoonright C_{k-1},C_{k-1}}$ są wszystkimi poddrzewami przyczepionymi do korzenia drzewa $\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}$. Dowód nierówności (2.4) przebiega tak samo, ponieważ drzewa $\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}$ oraz $\mathcal{D}_{\overline{\mathcal{F}},C}$ są identyczne.

Dowód nierówności (2.5) wynika z faktu, że zbiór wierzchołków drzewa Zielonki $\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}$ można różnowartościowo zanurzyć w zbiór wierzchołków drzewa powstałego przez rozwinięcie diagramu kraty wszystkich podzbiorów zbioru C kolorów. Łatwo udowodnić przez indukcję ze względu na liczbę elementów zbioru C, że liczba liści takiego drzewa jest równa $|C|!$. □

Twierdzenie 19 (O determinacji gier McNaughtona)
Niech $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, \mathcal{F})$ będzie grą McNaughtona z areną $\mathcal{A} = (V, V_0, V_1, E, C, \chi)$ oraz warunkiem wygrywającym $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(C)$. Niech $W_i \subseteq V$ dla $i = 0, 1$ będzie zbiorem wygrywającym gracza i w grze $\mathcal{G}$. Wtedy:

1. *$W_0 \cup W_1 = V$,*
2. *istnieje strategia $(M_{\mathcal{F}}, \zeta_0, M_{\mathcal{F}})$ wygrywająca dla gracza 0 ze zbioru W_0,*
3. *istnieje strategia $(M_{\overline{\mathcal{F}}}, \zeta_1, M_{\overline{\mathcal{F}}})$ wygrywająca dla gracza 1 ze zbioru W_1,*

gdzie $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{F}$.

Uwaga: Punkt 1 twierdzenia 19 oznacza, że każda gra McNaughtona jest zdeterminowana, tj. z każdego wierzchołka dokładnie jeden z graczy ma strategię wygrywającą. Z punktów 2 i 3 wynika, że każdy z graczy ma ze swojego zbioru wygrywającego strategię wygrywającą ze skończoną pamięcią rozmiaru nie większego niż $|C|!$.
Dowód
Dowód przebiega przez indukcję ze względu na budowę drzewa Zielonki $\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}$ warunku $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(C)$. Niech $\mathcal{D}_{\mathcal{F}\upharpoonright C_0,C_0}, \ldots, \mathcal{D}_{\mathcal{F}\upharpoonright C_{k-1},C_{k-1}}$ będą poddrzewami przyczepionymi do korzenia drzewa $\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}$. Przyjmijmy bez zmniejszenia ogólności, że $C \notin \mathcal{F}$. Jeśli bowiem $C \in \mathcal{F}$ to w poniższym rozumowaniu zamieniamy graczy rolami, tj. rozpatrujemy grę $\mathcal{G}' = (\mathcal{A}, \overline{\mathcal{F}})$.

Przez $\mathcal{F}_i$ dla $i = 0, \ldots, k-1$ będziemy oznaczać warunek $\mathcal{F} \upharpoonright C_i \subseteq \mathcal{P}(C_i)$.

Definiujemy przez indukcję pozaskończoną rosnący ciąg zbiorów $\langle U_\xi \rangle$ w następujący sposób.

1. Jeśli ξ jest graniczną liczbą porządkową to niech $U_\xi = \bigcup_{\nu<\xi} U_\nu$
2. Jeśli ξ jest następnikiem pewnej liczby porządkowej, to definiujemy U_ξ następująco:
   (a) $A_\xi = \mathrm{Attr}_0^V(U_{\xi-1})$
   (b) $X_\xi = V \setminus A_\xi$
   (c) $Y_\xi = X_\xi \setminus \mathrm{Attr}_1^{X_\xi}\left(\chi^{-1}(C \setminus C_{(\xi \bmod k)})\right)$
   (d) Niech Z_ξ będzie zbiorem wygrywającym gracza 0 w podgrze $\mathcal{G}_\xi = (\mathcal{A} \upharpoonright Y_\xi, \mathcal{F} \upharpoonright C_{(\xi \bmod k)})$
   (e) $U_\xi = A_\xi \cup Z_\xi$

Zauważmy, że $\mathcal{G}_\xi$ jest rzeczywiście podgrą, czyli Y_ξ jest podareną (tj. z każdego wierzchołka w Y_ξ wychodzi przynajmniej jedna krawędź do wierzchołka w Y_ξ). Wiadomo bowiem, że X_ξ jest podareną jako uzupełnienie atraktora. Z tego samego powodu Y_ξ jest podareną.

Dla każdej liczby porządkowej ξ drzewo Zielonki warunku wygrywającego $\mathcal{F}_{(\xi \bmod k)}$ w podgrze $\mathcal{G}_\xi$ jest właściwym poddrzewem drzewa Zielonki warunku wygrywającego $\mathcal{F}$ w grze $\mathcal{G}$. Możemy więc wnioskować z hipotezy indukcyjnej, że w podgrze $\mathcal{G}_\xi$ gracz 0 ma strategię wygrywającą z pamięcią $M_{\mathcal{F}_j}$ ze zbioru Z_ξ, a gracz 1 ma strategię wygrywającą z pamięcią $M_{\overline{\mathcal{F}_j}}$ ze zbioru $Y_\xi \setminus Z_\xi$, gdzie $j = \xi \bmod k$, oraz $\overline{\mathcal{F}_j} = \mathcal{P}(C_j) \setminus \mathcal{F}_j$.

Niech $W = \bigcup_\xi U_\xi$. Wykażemy teraz, że $W_0 = W$ i $W_1 = V \setminus W$ oraz, że gracze 0 i 1 mają w grze $\mathcal{G}$ z tych zbiorów strategie wygrywające z pamięcią $M_\mathcal{F}$ i $M_{\overline{\mathcal{F}}}$, odpowiednio.

Fakt 20 Gracz 0 ma strategię wygrywającą $(M_\mathcal{F}, \zeta_0, M_\mathcal{F})$ ze zbioru W w grze $\mathcal{G}$, gdzie $\zeta_0 : M_\mathcal{F} \times (W \cap V_0) \to M_\mathcal{F} \times (W \cap V_1)$.

Dowód: Dowodzimy przez indukcję pozaskończoną, że dla każdej liczby porządkowej ξ gracz 0 ma strategię wygrywającą $\theta_\xi : M_\mathcal{F} \times (U_\xi \cap V_0) \to M_\mathcal{F} \times (U_\xi \cap V_1)$ ze zbioru U_ξ w grze $\mathcal{G}$. Strategia θ_ξ ma tę własność, że uniemożliwia wyjście rozgrywki poza zbiór U_ξ, oraz dla każdej pozycji początkowej w U_ξ wszystkie i stanu początkowego pamięci, rozgrywki zgodne z tą strategią są wygrywające dla gracza 0.

1. Jeśli ξ jest graniczną liczbą porządkową, to dla każdego $v \in U_\xi$ przez μ_v będziemy oznaczać najmniejszą liczbę porządkową ν dla której zachodzi $v \in U_\nu$. Z hipotezy indukcyjnej wynika, że dla każdego $\nu < \xi$ ze zbioru U_ν istnieje w grze $\mathcal{G}$ strategia wygrywająca θ_ν dla gracza 0 z pamięcią $M_\mathcal{F}$ uniemożliwiająca opuszczenie zbioru U_ν. Strategie θ_ξ z pamięcią $M_\mathcal{F}$ zdefiniujemy przez

   $$\theta_\xi(m, v) = \theta_{\mu_v}(m, v)$$

   dla każdego $v \in U_\xi$.

   Wykażemy, że strategia θ_ξ jest wygrywająca dla gracza 0 ze zbioru U_ξ w grze $\mathcal{G}$, oraz że żadna rozgrywka zgodna z tą strategią nie opuszcza zbioru U_ξ. Niech $\pi = \langle v_0, v_1, v_2, \ldots \rangle$ będzie rozgrywką zgodną ze strategią θ_ξ. Ciąg $\mu_{v_0}, \mu_{v_1}, \mu_{v_2}, \ldots$ jest nierosnący, ponieważ dla dowolnego $\nu < \xi$ strategia θ_ν uniemożliwia opuszczenie zbioru U_ν. Z dobrego ufundowania liczb porządkowych wynika z kolei, że ciąg $\mu_{v_0}, \mu_{v_1}, \mu_{v_2}, \ldots$ jest od pewnego miejsca stały, więc rozgrywka π od pewnego momentu toczy się w nieskończoność zgodnie ze strategią θ_ν dla pewnego $\nu < \xi$, czyli gracz 0 zostaje zwycięzcą w rozgrywce π.

2. Niech ξ będzie następnikiem pewnej liczby porządkowej. Z hipotezy indukcyjnej wiadomo, że gracz 0 ma w grze $\mathcal{G}$ strategie wygrywającą $\theta_{\xi-1}$ ze zbioru $U_{\xi-1}$ uniemożliwiającą wyjście rozgrywki w $\mathcal{G}$ poza zbiór $U_{\xi-1}$. Zbiór $A_\xi = \mathrm{Attr}_0^V(U_{\xi-1})$ jest oczywiście pułapką dla gracza 1, z której gracz 0 ma strategię wygrywającą $\theta_{\xi-1} \cup \kappa_\xi$, gdzie κ_ξ jest strategią ,,przyciągnij do zbioru $U_{\xi-1}$" określoną na zbiorze $\mathrm{Attr}_0^V(U_{\xi-1}) \setminus U_{\xi-1}$.

   Zbiór Y_ξ jest pułapką dla gracza 1 w podarenie X_ξ (jako uzupełnienie atraktora), więc zbiór Z_ξ jest również pułapką dla gracza 1 w podarenie X_ξ (jako zbiór wygrywający gracza 0 w podgrze $\mathcal{G}_\xi$). Strategię wygrywającą gracza 0 ze zbioru Z_ξ w podgrze $\mathcal{G}_\xi$ oznaczmy przez λ_ξ. Wykażemy teraz, że strategia $\theta_\xi = \theta_{\xi-1} \cup \kappa_\xi \cup \lambda_\xi$ jest strategią wygrywającą dla gracza 0 ze zbioru $U_\xi = A_\xi \cup Z_\xi$ w grze $\mathcal{G}$. Jeśli bowiem rozgrywka zgodna ze strategią θ_ξ toczy się tylko w zbiorze Z_ξ, to jest ona zgodna ze strategią λ_ξ, która jest z założenia wygrywająca dla gracza 0. Zbiór Z_ξ jest w podarenie X_ξ pułapką dla gracza 1, więc jeśli gracz 1 wyprowadza rozgrywkę ze zbioru Z_ξ to może to zrobić tylko do zbioru A_ξ. Wtedy gracz 0 korzystając ze strategii κ_ξ w skończonej liczbie kroków ,,doprowadza" rozgrywkę do zbioru $U_{\xi-1}$, gdzie wygrywa za pomocą strategii wygrywającej $\theta_{\xi-1}$.

Z założenia indukcyjnego strategia $\theta_{\xi-1}$ ma pamięć $M_{\mathcal{F}}$. Strategia κ_ξ jest strategią bez pamięci; można ją rozszerzyć na pamięć $M_{\mathcal{F}}$ nastepująco

$$\kappa_\xi(m,v) := (m, \kappa_\xi(v))$$

dla każdego $m \in M_{\mathcal{F}}$. Strategia λ_ξ ma pamięć $M_{\mathcal{F}_i}$, gdzie $i = \xi \bmod k$, ale z definicji $m_{\mathcal{F}} = \max\{m_{\mathcal{F}_0}, \ldots, m_{\mathcal{F}_{k-1}}\}$, skąd mamy $m_{\mathcal{F}_i} \leq m_{\mathcal{F}}$, więc strategię λ_ξ można rozszerzyć na pamięć $M_{\mathcal{F}}$ definiując

$$\lambda_\xi(m,v) := \begin{cases} \lambda_\xi(m,v) & \text{dla } m \leq m_{\mathcal{F}_i}, \\ \lambda_\xi(1,v) & \text{dla } m > m_{\mathcal{F}_i}. \end{cases}$$

Dziedziny strategii $\theta_{\xi-1}, \kappa_\xi$ i λ_ξ są rozłączne, więc ich suma θ_ξ jest poprawnie określona.

Ciąg $\langle U_\xi \rangle$ jest niemalejący więc istnieje liczba porządkowa μ dla której zachodzi $W = U_{\mu-1} = U_\mu = \cdots = U_{\mu+k-1}$. Jako strategię $\zeta_0 : M_{\mathcal{F}} \times (W \cap V_0) \to M_{\mathcal{F}} \times (W \cap V_1)$ bierzemy strategię θ_μ.

□

Fakt 21 Gracz 1 ma strategię wygrywającą $(M_{\overline{\mathcal{F}}}, \zeta_1, M_{\overline{\mathcal{F}}})$ ze zbioru $\overline{W}$ w grze $\mathcal{G}$, gdzie $\zeta_1 : M_{\overline{\mathcal{F}}} \times (\overline{W} \cap V_1) \to M_{\overline{\mathcal{F}}} \times (\overline{W} \cap V_0)$ oraz $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{F}$ i $\overline{W} = V \setminus W$.

Dowód: Niech $\overline{\mathcal{F}_i} = \overline{\mathcal{F}} \restriction C_i$ dla $i = 0, \ldots, k-1$.

Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąc, że $W = U_{\mu-1} = U_\mu = \cdots = U_{\mu+k-1}$ dla μ spełniającego $\mu \bmod k = 0$ (w przeciwnym razie wybieramy jako μ liczbę $\mu + (k - (\mu \bmod k)))$. Z równości $W = U_{\mu-1} = U_\mu$ wynika, że $\mathrm{Attr}_0^V(W) = W$, więc $\overline{W}$ jest pułapką dla gracza 0 jako uzupełnienie atraktora. Z hipotezy indukcyjnej wiadomo, że dla każdego $i = 0, \ldots, k-1$ gracz 1 ma w grze $\mathcal{G}_{\mu+i}$ ze zbioru $Y_{\mu+i}$ strategię wygrywającą ρ_i z pamięcią $M_{\overline{\mathcal{F}_i}}$, bo $Z_{\mu+i} = \emptyset$, więc z determinacji gry $\mathcal{G}_{\mu+i}$ wynika, że $Y_{\mu+i}$ jest zbiorem wygrywającym gracza 1 w grze $\mathcal{G}_{\mu+i}$.

Dla każdego $i = 0, \ldots, k-1$ oznaczmy przez T_i zbiór $\chi^{-1}(C \setminus C_i) \cap \overline{W}$. Przez σ_i będziemy oznaczać strategię „przyciągnij do zbioru T_i” określoną na zbiorze $\mathrm{Attr}_1^{\overline{W}}(T_i) \setminus T_i$. Dla każdej pozycji $v \in T_i \cap V_1$ definiujemy strategię τ_i przez

$$\tau_i(v) = w,$$

gdzie $w \in \overline{W}$ jest pewną pozycją dla której $(v, w) \in E$. Istnienie takiej pozycji w dla każdego $v \in T_i \subseteq \overline{W}$ jest zagwarantowane przez fakt, że $\overline{W}$ jest podareną V, jako uzupełnienie atraktora. Zauważmy, że dziedziny strategii ρ_i, σ_i oraz τ_i są rozłączne.

Dla każdego $i = 0, \ldots, k-1$ strategia ρ_i ma pamięć $M_{\overline{\mathcal{F}_i}}$, tj. $\rho_i : M_{\overline{\mathcal{F}_i}} \times (Y_{\mu+i} \cap V_1) \to M_{\overline{\mathcal{F}_i}} \times (Y_{\mu+i} \cap V_0)$. Strategia ζ_1 którą zdefiniujemy będzie zawierała jako swe podstrategie strategie ρ_i, σ_i oraz τ_i dla $i = 0, \ldots, k-1$. Dziedziny strategii ρ_i dla różnych i nie muszą być jednak rozłączne, więc aby uzyskać ich złożenie weźmiemy ich sumę rozłączną. Niech zbiory $M_{\overline{\mathcal{F}_i}}$ dla $i = 0, \ldots, k-1$ będą rozłączne, np. niech $M_{\overline{\mathcal{F}_i}} = \{1, \ldots, m_{\overline{\mathcal{F}_i}}\} \times \{i\}$. Na początku dowodu twierdzenia 19 założyliśmy, że $C \in \overline{\mathcal{F}}$, więc z definicji $m_{\overline{\mathcal{F}}} = \sum_{i=0}^{k-1} m_{\overline{\mathcal{F}_i}}$, czyli możemy utożsamiać zbiory $M_{\overline{\mathcal{F}}}$ oraz $\bigcup_{i=0}^{k-1} M_{\overline{\mathcal{F}_i}}$ bo są równoliczne.

Definiujemy strategię $\zeta_1 : M_{\overline{\mathcal{F}}} \times (\overline{W} \cap V_1) \to M_{\overline{\mathcal{F}}} \times (\overline{W} \cap V_0)$ następująco:

$$\zeta_1\big((m,i),v\big) = \begin{cases} \rho_i\big((m,i),v\big) & \text{jeśli } v \in Y_{\mu+i} \\ \big((m,i),\sigma_i(v)\big) & \text{jeśli } v \in \mathrm{Attr}_1^{\overline{W}}(T_i) \setminus T_i, \\ \big((1,(i+1) \bmod k),\tau_i(v)\big) & \text{jeśli } v \in T_i. \end{cases}$$

Wykażemy, że strategia ζ_1 jest wygrywająca dla gracza 1 ze zbioru $\overline{W}$ w grze $\mathcal{G}$. Jeśli rozgrywka π zgodna ze strategią ζ_1 jest od pewnego momentu ciągle zgodna z podstrategią ρ_i dla pewnego $i = 0, \ldots, k-1$ to rozgrywka ta jest oczywiście wygrywająca dla gracza 1. W przeciwnym razie dla każdego $i = 0, \ldots, k-1$ rozgrywka π odwiedza zbiór $\chi^{-1}(C \setminus C_i)$ nieskończenie często, więc $\mathrm{Inf}(\pi) \nsubseteq C_i$. Jednocześnie $\mathrm{Inf}(\pi) \subseteq C \in \overline{\mathcal{F}}$, skąd wynika, że $\mathrm{Inf}(\pi) \in \overline{\mathcal{F}}$ ponieważ C_i dla $i = 0, \ldots, k-1$ są wszystkimi maksymalnymi zbiorami w rodzinie $\{C' \notin \overline{\mathcal{F}} : C' \subseteq C\}$. $\square$

$\square$

Twierdzenie o determinacji gier z warunkiem wygrywającym w postaci rodziny podzbiorów zbioru kolorów oraz istnienie strategii ze skończoną pamięcią wykazali Gurevich i Harrington [9], którzy uprościli idee sygnalizowane wcześniej przez Büchi'ego (patrz komentarze w pracach [9] oraz [2]). Gurevich i Harrington udowodnili je dla gier rozgrywanych na nieskończonych drzewach, w których utożsamiane są wierzchołki będące korzeniami izomorficznych poddrzew. Wynik ten pozwolił im udowodnić w prostszy niż dotychczas sposób słynny lemat Rabina o uzupełnieniu automatów na nieskończonych drzewach, dający rozstrzygalność teorii S2S. Gurevich i Harrington wykazali, że w strategiach wygrywających wystarczy pamięć realizowana za pomocą struktury danych zwanej LAR (ang. *latest appearance record*). Zbiór stanów pamięci w strategiach realizowanych za pomocą LAR to zbiór permutacji zbioru kolorów C. Daje to ograniczenie $|C|!$ na rozmiar pamięci.

McNaughton [15] wprowadził gry z warunkiem wygrywającym w postaci rodziny podzbiorów zbioru kolorów na skończonych grafach (arenach) i w elementarny sposób udowodnił dla nich twierdzenie o determinacji oraz istnienie strategii z pamięcią LAR. Zielonka [21] rozszerzył wynik McNaughtona na gry o nieskończonych arenach. W swoim dowodzie twierdzenia o determinacji dla takich gier próbował ograniczać rozmiar pamięci potrzebnej w strategiach wygrywających wprowadzając pojęcie ,,kolorów istotnych" (ang. *useful colours*). Jego optymalizacje pozwoliły mu wykazać istnienie strategii wygrywających bez pamięci dla gracza 0 w grach z warunkiem wygrywającym dającym się przedstawić (bez zmiany areny) w postaci normalnej Rabina. Fakt ten pokazali wcześniej Emerson [5] oraz Klarlund [13]. Ogólnie jednak zastosowanie ,,kolorów istotnych" nie pozwoliło na osiągnięcie optymalnego rozmiaru pamięci wystarczającej dla strategii wygrywających.

Dowód twierdzenia 19 przedstawiony w tej pracy naśladuje dowód Zielonki, lecz ograniczenie górne na rozmiar pamięci uzyskane przez nas jest dla niektórych warunków wygrywających nawet wykładniczo lepsze niż to uzyskane przez Zielonkę. Można też wykazać, że górne ograniczenie na rozmiar pamięci z twierdzenia 19 jest w pewnym sensie optymalne. W pracy [3] znajduje się dowód, że dla każdego warunku wygrywającego $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(C)$ istnieje pokolorowana arena $(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}, C, \chi)$ taka, że w grze $\big((\mathcal{A}_{\mathcal{F}}, C, \chi), \mathcal{F}\big)$ gracz 0 ma strategię wygrywającą, ale każda strategia wygrywająca ma pamięć rozmiaru co najmniej $m_{\mathcal{F}}$.

Jak już wspomnieliśmy, wynik o determinacji (ze skończoną pamięcią) gier McNaughtona na nieskończonych drzewach posłużyl Gurevichowi i Harringtonowi do konstrukcji automatu na nieskończonych drzewach rozpoznającego uzupełnienie języka drzew rozpoznawanego przez zadany automat. Klarlund [13] przedstawił konstrukcję, która dla automatu na drzewach nieskończonych z warunkiem akceptacji zadanym w postaci normalnej Streeta daje automat rozpoznający uzupełnienie o pojedynczo wykładniczej liczbie stanów. Wykorzystał on w tym celu fakt, że w grach z warunkiem wygrywającym w postaci normalnej Rabina istnieją strategie bez pamięci. Istnieje ogólna konstrukcja w której stanami automatu rozpoznającego uzupełnienie są podzbioru zbioru par (stan danego automatu, stan pamięci strategii wygrywającej). Górne ograniczenie na rozmiar pamięci przedstawione w twierdzeniu 19 daje w ten sposób dla pewnych rodzin warunków wygrywających pojedynczo wykładnicze ograniczenie na liczbę stanów automatu rozpoznającego uzupełnienie. Ogólnie potrafimy pokazać jedynie podwójnie wykładniczą górną granicę. Pozostaje otwartym pytanie, czy można wykazać podwójnie wykładniczą dolną granicę.

Rozdział 3

O złożoności obliczeniowej gier McNaughtona

3.1 Złożoność problemu wyznaczania zwycięzcy w grach McNaughtona

Wykażemy teraz, że problem wyznaczania zwycięzcy w grach MaNaughtona jest w klasie złożoności NP $\cap$ co-NP, jeśli warunek wygrywający reprezentujemy za pomocą jego drzewa Zielonki. Ten fakt można traktować jako uogólnienie wyniku przedstawionego w pracy Emersona, Jutli i Sistli [8], że problem wyznaczania zwycięzcy w grach Mostowskiego jest w NP $\cap$ co-NP. W tym szczegoólnym przypadku drzewo Zielonki warunku wygrywającego (odpowiadającego warunkowi wygrywającemu w grze Mostowskiego) jest drzewem bez rozgałęzień, zatem jego rozmiar jest wielomianowy ze względu na rozmiar areny.

Twierdzenie 22 (Złożoność gier McNaughtona)
Problem $\big\{ \big(\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}, (\mathcal{A}, C, \chi), v_0\big)$: *gracz 0 ma strategię wygrywającą z pozycji* v_0 *areny* $\mathcal{A}$ *w grze* $\big((\mathcal{A}, C, \chi), \mathcal{F}\big)\big\}$ *jest w klasie złożoności NP* $\cap$ *co-NP.*

Dowód
Niech $\mathcal{A} = (V, V_0, V_1, E)$ oraz $\mathcal{G} = \big((\mathcal{A}, C, \chi), \mathcal{F}\big)$. Z drugiej części twierdzenia 19 wynika, że jeśli gracz 0 ma jakąkolwiek strategię wygrywającą z pozycji v_0, to istnieje dla niego strategia wygrywająca $\zeta_0 : M_{\mathcal{F}} \times (W \cap V_0) \to M_{\mathcal{F}} \times (W \cap V_1)$, gdzie $v_0 \in W \subseteq V$. Strategia ζ_0 jest skończoną funkcją o

rozmiarze ograniczonym przez $|\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}| * |\mathcal{A}|$ (bo $m_{\mathcal{F}} \leq |\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}|$), czyli wielomianowym ze względu na rozmiar egzemplarza problemu.

Niedeterministyczny algorytm może więc w wielomianowym czasie zgadnąć strategię ζ_0. Aby udowodnić, że problem jest w NP wystarczy pokazać wielomianowy deterministyczny algorytm rozstrzygający czy dana strategia jest wygrywająca dla gracza 0. Taki sam argument można użyć by wykazać, że problem jest w co-NP. Jeśli bowiem gracz 0 nie ma strategii wygrywającej z pozycji v_0, to z twierdzenia o determinacji dla gier McNaughtona wiadomo, że wtedy gracz 1 ma strategię wygrywającą $\zeta_1 : M_{\overline{\mathcal{F}}} \times (\overline{W} \cap V_1) \to M_{\overline{\mathcal{F}}} \times (\overline{W} \cap V_0)$, gdzie $v_0 \in \overline{W}$. Do rozstrzygnięcia czy strategia ζ_1 jest wygrywająca dla gracza 1 w grze $\mathcal{G} = \big((\mathcal{A}, C, \chi), \mathcal{F}\big)$ wystarczy sprawdzić czy jest ona wygrywająca dla gracza 0 w grze $\mathcal{G}' = \big((\mathcal{A}, C, \chi), \overline{\mathcal{F}}\big)$.

Niech $G = (M_{\mathcal{F}} \times V, E_G)$ będzie grafem w którym $\big((m, v), (m', v')\big) \in E_G$ jeśli zachodzi jeden z warunków

1. $m = m'$ oraz $(v, v') \in E \cap (V_1 \times V_0)$, lub
2. $\zeta_0(m, v) = (m', v')$.

Ograniczamy graf G do zbioru wierzchołków osiągalnych z wierzchołka (v_0, m_I), gdzie m_I jest pewnym stanem początkowym strategii ζ_0. Kolorujemy graf G kolorami ze zbioru C zgodnie z kolorowaniem pozycji areny $\mathcal{A}$, tj. przyjmujemy $\chi\big((m, v)\big) = \chi(v)$. Zbiór wszystkich ścieżek nieskończonych w grafie G odpowiada dokładnie zbiorowi wszystkich nieskończonych rozgrywek o początku w pozycji v_0 i stanie m_I zgodnych ze strategią ζ_0 w grze $\mathcal{G}$.

Aby stwierdzić, że strategia ζ_0 jest strategią wygrywającą dla gracza 0 wystarczy sprawdzić, czy dla każdej nieskończonej ścieżki w grafie G, zbiór kolorów występujących nieskończenie często na tej ścieżce należy do $\mathcal{F}$. W tym celu wykonujemy następujący algorytm.

<u>G `spełnia warunek` $\mathcal{F}$?</u>

1. Podziel graf G na maksymalne silnie spójne składowe (m.s.s.s.).
2. Jeśli dla pewnej m.s.s.s. H grafu G zachodzi $\vec{\chi}(H) \notin \mathcal{F}$ to `nie akceptuj`.
3. W przeciwnym razie `dla każdej` m.s.s.s. H grafu G `wykonaj`:

   niech $C_1, \ldots, C_k$ będą wszystkimi maksymalnymi elementami rodziny $\{D \notin \mathcal{F} : D \subseteq \vec{\chi}(H)\}$,

`dla każdego` $i = 1, \ldots, k$ `sprawdź rekurencyjnie`, czy
$H \upharpoonright \chi^{-1}(C_i)$ `spełnia warunek` $\mathcal{F} \upharpoonright C_i$.

4. Jeśli wszystkie rekurencyjne sprawdzenia w kroku 3 zakończyły się pomyślnie (tj. nigdy nie zaszedł warunek z kroku 2), to `akceptuj`.

Wykażemy teraz poprawność tego algorytmu, tj. udowodnimy że algorytm akceptuje graf G wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej nieskończonej ścieżki w G zbiór kolorów występujących na niej nieskończenie często należy do zbioru $\mathcal{F}$. Zauważmy, że dla każdej nieskończonej ścieżki w grafie G zbiór wierzchołków występujących na niej nieskończenie często stanowi pewną s.s.s. w G. Wystarczy więc wykazać, że nasz algorytm sprawdza, czy w G istnieje taka s.s.s. I, że $\vec{\chi}(I) \notin \mathcal{F}$.

Jeśli dla pewnej m.s.s.s. H grafu G zachodzi $\vec{\chi}(H) \notin \mathcal{F}$ to w kroku 2 nasz algorytm zatrzymuje się i nie akceptuje G. W przeciwnym razie dla każdej m.s.s.s. H problem można rozpatrywać niezależnie. Niech $C_1, \ldots, C_k$ będą wszystkimi maksymalnymi elementami rodziny $\{D \notin \mathcal{F} : D \subseteq \vec{\chi}(H)\}$. Dla dowolnego zbioru $D \subseteq \vec{\chi}(H)$ takiego, że dla pewnego $i = 1, \ldots, k$ zachodzi $D \nsubseteq C_i$ mamy $D \in \mathcal{F}$, bo $C_1, \ldots, C_k$ są wszystkimi maksymalnymi podzbiorami $\vec{\chi}(H)$ nie należącymi do F, zatem w poszukiwaniu s.s.s. $I \subseteq H$ dla której $\vec{\chi}(I) \notin \mathcal{F}$ wystarczy ograniczyć się do podgrafów $H \upharpoonright \chi^{-1}(C_i)$, dla $i = 1, \ldots, k$.

Wykażemy teraz, że czas działania tego algorytmu można ograniczyć przez wielomian ze względu na rozmiar egzemplarza problemu. Krok 1 można wykonać w czasie liniowym ze względu na rozmiar grafu G. Krok 2 można wykonać w czasie nie większym niż rozmiar drzewa Zielonki $\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}$.

Twierdzimy, że sumaryczną liczbę wywołań rekurencyjnych w kroku 3 algorytmu można ograniczyć przez $|G| * |\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}|$. Rozważmy zbiór ścieżek w drzewie rekurencyjnych wywołań powyższego algorytmu, na których występuje w analizowanym podgrafie pewien ustalony wierzchołek w grafu G. Pokażemy, że ten zbiór ścieżek daje się różnowartościowo zanurzyć w zbiorze ścieżek drzewa $\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}$ warunku wygrywającego $\mathcal{F}$. W rozgałęzieniu „`dla każdej` m.s.s.s. H grafu G ... ” w kroku 3 algorytmu wierzchołek w należy tylko do co najwyżej jednej z m.s.s.s. Natomiast w drugim rozgałęzieniu w kroku 3 algorytmu, tj. „`dla każdego` $i = 1, \ldots, k$ ... ” drzewa Zielonki warunków $\mathcal{F} \upharpoonright C_i$ są właściwymi poddrzewami drzewa Zielonki warunku wygrywającego $\mathcal{F}$. Wynika z tego, że każdemu rozgałęzieniu w poddrzewie rekurencyjnych wywołań naszego algorytmu w którym występuje wierzchołek

w można różnowartościowo przyporządkować pewne rozgałęzienie w drzewie Zielonki $\mathcal{D}_{\mathcal{F},C}$. $\square$

3.2 Złożoność automatycznej syntezy programów

Grę McNaughtona można traktować jako specyfikację systemu reagującego. Arena opisuje tutaj wszystkie możliwe interakcje między graczem 0 (*kontrolerem*) a graczem 1 (*środowiskiem*). Warunek wygrywający pełni rolę specyfikacji, wyróżniając dopuszczalne lub poprawne zachowania sytemu. W tej metaforze strategia wygrywająca dla gracza 0 może być traktowana jako program spełniający zadaną przez warunek wygrywający specyfikację wymagań [18, 11, 12, 17]. O problemie wyznaczania strategii wygrywającej dla gracza 0 w grach McNaughtona można więc myśleć jako o *automatycznej syntezie programów*.

Zagadnieniem automatycznej syntezy programów opartym na wyznaczaniu strategii w odpowiednio zdefiniowanych grach zajmowało się wielu autorów [1, 19, 18, 11, 14, 20, 12, 17]. Lescow [11, 12] rozważał gry McNaughtona z arenami, w których każda pozycja ma inny kolor. Poszukiwał on w tym modelu charakteryzacji warunków wygrywających, dla których gracz 0 ma strategie wygrywające o rozmiarze wielomianowym ze względu na liczbę kolorów. W pracy [11] podał on kilka przykładów takich rodzin warunków wygrywających. Dla wszystkich przykładów przedstawionych przez Lescowa, istnienie strategii o wielomianowej pamięci można wywnioskować z twierdzenia 19. Z drugiej strony dolne ograniczenie na rozmiar pamięci podane w pracy [3] wykorzystuje areny o rozmiarze wykładniczym ze względu na liczbę kolorów, więc pełna charakteryzacja warunków wygrywających dopuszczających strategie wygrywające wielomianowego rozmiaru w modelu Lescowa pozostaje problemem otwartym.

Nerode, Remmel i Yakhnis [17] podali przykłady rodzin warunków wygrywających, dla których istnieją wielomiawe algorytmy syntezy strategii. Nietrudno się przekonać, że algorytm syntezy strategii w grach McNaughtona oparty wprost na indukcyjnej konstrukcji przedstawionej w dowodzie twierdzenia 19 działa w czasie $\mathcal{O}((|\mathcal{A}| * d)^h)$, gdzie $|\mathcal{A}|$ jest rozmiarem areny, d jest maksymalnym stopniem wierzchołka w drzewie Zielonki warunku wygrywającego, a h jest wysokością drzewa Zielonki. Klasa warunków wygrywających dla których ten algorytm działa w czasie wielomianowym ze względu na rozmiar areny jest szersza niż przykłady podane przez Nerode'a, Remmela i Yakhnisa.

Rozdział 4

O złożoności obliczeniowej gier Mostowskiego

Przedstawimy teraz wielomianową redukcję problemu wyznaczania zwycięzcy w grach Mostowskiego do analogicznego problemu dla gier Ehrenfeuchta-Mycielskiego. Następnie wykorzystamy redukcję gier Ehrenfeuchta-Mycielskiego do gier Zwicka-Patersona oraz fakt wykazany przez Zwicka i Patersona [22] o istnieniu jedynego ,,rozwiązania" w tych grach, co pozwala wnioskować, że problem wyznaczania zwycięzcy we wszystkich trzech typach gier jest w UP $\cap$ co-UP.

Twierdzenie 23
Problem wyznaczania zwycięzcy w grach Mostowskiego można zredukować w czasie wielomianowym do problemu wyznaczania zwycięzcy w grach Ehrenfeuchta-Mycielskiego.

Dowód
Dla danej gry Mostowskiego $\mathcal{G} = \big((V, V_0, V_1, E), p\big)$ oraz pozycji początkowej $v_0 \in V$ konstruujemy grę Ehrenfeuchta-Mycielskiego $\mathcal{H} = \big((V, V_0, V_1, E), c, w, \nu\big)$ taką, że gracz 0 ma strategię wygrywającą z pozycji v_0 w grze $\mathcal{G}$ wtedy i tylko wtedy, gdy gracz 0 ma strategię wygrywającą z v_0 w $\mathcal{H}$. Niech $e = (v, u) \in E$ oraz $m = |V|$. Definiujemy $w(e) = (-m)^{p(u)}$, $c = m^r$, gdzie $r = \max\{p(v) : v \in V\}$ oraz $\nu = 0$. Zauważmy, że funkcja w ma wartości eksponencjalne ze względu na rozmiar gry $\mathcal{G}$, lecz ich reprezentacje binarne są rozmiaru wielomianowego ze względu na m i mogą być obliczone w czasie wielomianowym.

Zauważmy, że areny gier $\mathcal{G}$ oraz $\mathcal{H}$ są identyczne, więc strategia (bez pamięci) w grze $\mathcal{G}$ jest jednocześnie strategią (bez pamięci) w grze $\mathcal{H}$ i na odwrót. Niech σ będzie pewną strategią bez pamięci dla gracza 0 z pozycji v_0 w grze $\mathcal{G}$ ($\mathcal{H}$). Przez $\mathcal{G}_\sigma$ ($\mathcal{H}_\sigma$) będziemy oznaczać podgrę gry $\mathcal{G}$ ($\mathcal{H}$) otrzymaną przez usunięcie z areny $\mathcal{A}$ wszystkich przejść z pozycji w V_0, oprócz tych które należą do strategii σ, oraz usunięcie wszystkich pozycji nieosiągalnych z pozycji v_0 za pomocą pozostawionych przejść. Rozgrywki w grze $\mathcal{G}$ ($\mathcal{H}$) rozpoczynające się z pozycji v_0 i zgodne ze strategią σ odpowiadają dokładnie zbiorowi wszystkich rozgrywek w grze $\mathcal{G}_\sigma$ ($\mathcal{H}_\sigma$).

Fakt 24 Niech σ będzie strategią bez pamięci dla gracza 0 w grze $\mathcal{G}$ ($\mathcal{H}$). Wtedy

1. dla każdego prostego cyklu c w $\mathcal{G}_\sigma$ najwyższy priorytet wierzchołka na cyklu c jest parzysty wtedy i tylko wtedy, gdy suma wag krawędzi na cyklu c w $\mathcal{H}_\sigma$ jest nieujemna,

2. jeśli σ jest strategią wygrywającą dla gracza 0 w $\mathcal{G}$ to dla każdego cyklu prostego c w $\mathcal{G}_\sigma$ najwyższy priorytet wierzchołka występującego na c jest parzysty,

3. jeśli σ jest strategią wygrywającą dla gracza 0 w $\mathcal{H}$ to dla każdego cyklu prostego c w $\mathcal{H}_\sigma$ suma wag krawędzi cyklu c jest nieujemna.

Dowód:

1. Prosty rachunek.

2. Przypuśćmy, że istnieje w $\mathcal{G}_\sigma$ prosty cykl c w którym najwyższy priorytet wierzchołka jest nieparzysty. To prowadzi do sprzeczności z założeniem, że σ jest strategią wygrywającą dla gracza 0 w grze $\mathcal{G}$, bowiem gracz 1 może sprowadzić rozgrywkę z v_0 do cyklu c, a następnie wymusić pozostawanie rozgrywki w tym cyklu w nieskończoność i w ten sposób wygrać.

3. Analogicznie jak w punkcie 2.

$\square$

Przyjmijmy, że gracz 0 ma strategię wygrywającą z pozycji v_0 w grze $\mathcal{G}$. Jak wykazali Mostowski [16] oraz Emerson i Jutla [7] gracz 0 ma wtedy także strategię wygrywającą σ bez pamięci z pozycji v_0. Udowodnimy, że strategia σ jest również strategią wygrywającą dla gracza 0 w grze $\mathcal{H}$. Musimy zatem wykazać, że dla każdej rozgrywki $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots \rangle$ w której gracz 0 wykonuje swoje ruchy zgodnie ze strategią σ, zachodzi nierówność

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w\big((v_{i-1}, v_i)\big) \geq 0.$$

Wykażemy teraz, że każda nieskończona rozgrywka $\pi = \langle v_0, v_1, v_2, \ldots \rangle$ w $\mathcal{H}_\sigma$ może zostać rozłożona (za wyjątkiem ograniczonej przez rozmiar areny liczby pozycji) na cykle proste. Rozważmy następujący proces dekompozycji nieskończonej rozgrywki π w $\mathcal{H}_\sigma$. Odkładamy kolejne pozycje areny z rozgrywki π na stos, zawierający zawsze ciąg parami różnych pozycji $\langle u_0, u_1, \ldots, u_k \rangle$. Jeśli kolejna rozpatrywana pozycja z rozgrywki π znajduje się na stosie, to zdejmujemy ze stosu wszystkie pozycje leżące ponad nią. W przeciwnym razie dodajemy bieżącą pozycje na szczyt stosu. Zauważmy, że ilekroć zdejmujemy ze stosu pewien ciąg pozycji, to odpowiadający mu ciąg przejść tworzy cykl prosty.

W ten sposób z punktów 1 i 2 faktu 24 wynika, że tylko wagi przejść odpowiadających ciągowi pozycji znajdujących się na stosie nie są pogrupowane w bloki dające nieujemną sumę. Wynika z tego, że

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w\big((v_{i-1}, v_i)\big) \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} w\big((u_{i-1}, u_i)\big) \geq 0$$

ponieważ $k \leq |\mathcal{A}|$, więc wartość bezwzględna sumy $\sum_{i=1}^{k} w\big((u_{i-1}, u_i)\big)$ jest ograniczona przez stałą.

Aby zakończyć dowód twierdzenia musimy wykazać także odwrotną implikację, tj. że jeśli gracz 0 ma strategię wygrywającą z pozycji v_0 w grze $\mathcal{H}$, to ma także strategię wygrywającą z pozycji v_0 w grze $\mathcal{G}$. Ponownie możemy ograniczyć się do rozważania tylko strategii bez pamięci (pozycyjnych), ponieważ jak wykazali niezależnie Ehrenfeucht i Mycielski [4] oraz Gurwicz, Karzanow i Chaczijan [10] w grach Ehrenfeuchta-Mycielskiego obaj gracze mają na swoich zbiorach wygrywających strategie wygrywające bez pamięci.

Następnie wystarczy ponownie zastosować opisaną powyżej technikę dekompozycji nieskończonych rozgrywek w grze $\mathcal{G}_\sigma$ na cykle proste, oraz wykorzystać punkty 1 i 3 faktu 24. $\square$

Niech $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, c, w, \nu)$ będzie grą Ehrenfeuchta-Mycielskiego. Ehrenfeucht i Mycielski [4] oraz niezależnie Gurwicz, Karzanow i Chaczijan [10] wykazali, że dla każdej pozycji $v \in V$ areny $\mathcal{A}$ istnieje liczba $\nu(v)$ zwana *wartością gry $\mathcal{G}$ w pozycji v* taka, że zachodzą następujące dwa warunki

1. gracz 0 ma z pozycji v strategię bez pamięci gwarantującą, że dla dowolnej rozgrywki $\langle v = v_0, v_1, v_2, \ldots \rangle$ z nią zgodnej zachodzi

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w\big((v_{i-1}, v_i)\big) \geq \nu(v),$$

2. gracz 1 ma z pozycji v strategię bez pamięci gwarantującą, że dla dowolnej rozgrywki $\langle v = v_0, v_1, v_2, \ldots \rangle$ z nią zgodnej zachodzi

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w\big((v_{i-1}, v_i)\big) \leq \nu(v).$$

Podobnie definiuje się wartość $\nu_\lambda(v)$ gry Zwicka-Patersona $\mathcal{G}_\lambda$; zamiast wyrażenia $1/n \sum_{i=1}^{n} w\big((v_{i-1}, v_i)\big)$ podstawiamy wyrażenie $(1-\lambda)\cdot\sum_{i=1}^{n} \lambda^i w\big((v_{i-1}, v_i)\big)$. Zwick i Paterson [22] wykazali, że dla każdego v jeśli λ dąży do 1, to wartość $\nu_\lambda(v)$ zbiega do wartości gry Ehrenfeuchta-Mycielskiego o tej samej arenie, tj. do $\nu(v)$. Z oszacowania prędkości tej zbieżności wywnioskowali też, że istnieje redukcja (w czasie wielomianowym) problemu gier Ehrenfeuchta-Mycielskiego do problemu gier Zwicka-Patersona.

Zwick i Paterson udowodnili też następujące twierdzenie, charakteruzujące wektor wartości gry $\mathcal{G}_\lambda$.

Twierdzenie 25
Wektor $\overline{\nu} = \langle \nu_\lambda(v) \rangle_{v\in V}$ wartości gry Zwicka-Patersona $\mathcal{G}_\lambda$ jest jedynym rozwiązaniem następującego układu równań

$$x_v = \begin{cases} \max_{(v,u)\in E} \big\{(1-\lambda)\cdot w\big((v,u)\big) + \lambda x_u\big\} & \textit{jeśli } v \in V_0, \\ \min_{(v,u)\in E} \big\{(1-\lambda)\cdot w\big((v,u)\big) + \lambda x_u\big\} & \textit{jeśli } v \in V_1, \end{cases} \tag{4.1}$$

dla $v \in V$.

Powtórzymy teraz za Zwickiem i Patersonem dowód tego twierdzenia ze szczególnym uwzględnieniem wielomianowego ograniczenia na rozmiar zapisu binarnego rozwiązania powyższego układu równań. Z jedyności tego rozwiązania wynika, że problem wyznaczania zwycięzcy w grach Zwicka-Patersona jest w klasie złożoności UP $\cap$ co-UP, co w połączeniu z redukcją gier Mostowskiego do gier Zwicka-Patersona (poprzez gry Ehrenfeuchta-Mycielskiego) daje górne ograniczenie UP $\cap$ co-UP na złożoność problemu wyznaczania zwycięzcy w grach Mostowskiego.

Dowód

Niech $\Phi : \mathbb{R}^{|V|} \to \mathbb{R}^{|V|}$ będzie odwzorowaniem zdefiniowanym następująco

$$\big(\Phi(\overline{x})\big)_v = \begin{cases} \max_{(v,u)\in E} \big\{(1-\lambda)\cdot w\big((v,u)\big) + \lambda x_u\big\} & \text{jeśli } v \in V_0, \\ \min_{(v,u)\in E} \big\{(1-\lambda)\cdot w\big((v,u)\big) + \lambda x_u\big\} & \text{jeśli } v \in V_1, \end{cases}$$

dla $v \in V$. Układ równań ze sformułowania twierdzenia można przedstawić w postaci $\overline{x} = \Phi(\overline{x})$. Definiujemy ,,normę" $||\cdot||$ następująco

$$||\overline{x}|| = \max_{v\in V}\{x_v\}.$$

(Zauważmy, że nie jest to norma w ścisłym sensie, ponieważ może ona przyjmować wartości ujemne). Bezpośredni rachunek może nas przekonać, że odwzorowanie Φ jest zwężające ze stałą λ, tj. dla dowolnych $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^{|V|}$ zachodzi nierówność

$$||\Phi(\overline{x}) - \Phi(\overline{y})|| \leq \lambda||\overline{x} - \overline{y}||.$$

Wynika stąd, że granica $\overline{x} = \lim_{n\to\infty} \Phi^n(\overline{0})$ istnieje oraz, że jest jedynym rozwiązaniem równania $\Phi(\overline{x}) = \overline{x}$.

Niech $\overline{x}$ będzie rozwiązaniem równania $\Phi(\overline{x}) = \overline{x}$. Nietrudno jest sprawdzić, że jeśli gracz 0 gra zgodnie ze strategią polegającą na wybieraniu w każdej pozycji $v \in V_0$ przejścia $(v,u) \in E$ dla którego wartość $(1-\lambda)\cdot w\big((v,u)\big) + \lambda x_u$ jest największa, to wartość rozgrywki rozpoczynającej się w pozycji v wynosi co najmniej x_v. Podobnie, jeśli gracz 1 gra zgodnie ze strategią polegającą na wybieraniu w każdej pozycji $v \in V_1$ przejścia $(v,u) \in E$ dla którego wartość $(1-\lambda)\cdot w\big((v,u)\big) + \lambda x_u$ jest najmniejsza, to wartość rozgrywki rozpoczynającej się w pozycji v wynosi co najwyżej x_v. Wynika stąd, że wartość gry $\mathcal{G}_\lambda$ w pozycji v jest równa dokładnie x_v.

Wykażemy teraz, że jedyne rozwiązanie układu równań 4.1 daje się zapisać za pomocą wielomianowej liczby bitów. Niech $\overline{x}$ będzie tym rozwiązaniem, tj. niech $\Phi(\overline{x}) = \overline{x}$. Wtedy zachodzi równość

$$\overline{x} = (1-\lambda)\cdot\overline{w} + \lambda\cdot Q\cdot\overline{x} \tag{4.2}$$

gdzie $\overline{w}$ jest wektorem odpowiednich wag $w\big((v,u)\big)$, a Q jest macierzą zero-jedynkową taką, że w każdym wierszu jest dokładnie jedna jedynka.

W redukcji gier Ehrenfeuchta-Mycielskiego do gier Zwicka-Patersona można dobrać stałą λ tak, aby była liczbą wymierną p/q, gdzie $\log p, \log q < N < p(|\mathcal{G}|)$ dla pewnego wielomianu p. Można więc przepisać równość 4.2 następująco

$$A \cdot \overline{x} \;\; = \;\; (q-p) \cdot \overline{w}$$

gdzie $A = q \cdot I - p \cdot Q$, a I jest macierzą jednostkową $|V| \times |V|$. Zauważmy, że A jest macierzą o wartościach całkowitych co do modułu nie większych niż 2^N taką, że w każdym wierszu są tylko dwie wartości różne od zera. Nietrudno udowodnić przez indukcję ze względu na rozmiar macierzy, że wyznacznik A jest co do modułu nie większy niż $4^{N|V|}$. Z reguły Kramera wynika, że $x_v = \det A_v / \det A$, gdzie A_v powstaje z A przez wstawienie wektora $(q-p) \cdot \overline{w}$ na miejsce v-tej kolumny. Wynika stąd, że elementy wektora $\overline{x}$ daje się zapisać za pomocą wielomianowej liczby bitów, więc algorytm niedeterministyczny zgadujący rozwiązanie układu równań 4.1 a następnie sprawdzający, że jest to rozwiązanie oraz czy $x_{v_0} \geq \nu$, daje przynależność problemu gier Zwicka-Patersona do klasy UP $\cap$ co-UP. $\square$

Literatura

[1] M. Abadi, L. Lamport and P. Wolper, *Realizable and unrealizable specifications of reactive systems*, in: Proc. 16th Int. Coll. Automata, Languages and Programming, LNCS **372** (1989) 1–17.

[2] J. R. Büchi, *State-strategies for games in $F_{\sigma\delta} \cap G_{\delta\sigma}$*, The Journal of Symb. Logic, **48** (1983) 1171–1198.

[3] S. Dziembowski, M. Jurdziński i I. Walukiewicz, *How much memory is needed to win infinite games?*, ukaże się w: Proc. of 12th Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science (1997).

[4] A. Ehrenfeucht i J. Mycielski, *Positional strategies for mean payoff games*, Int. J. of Game Theory **8**(2) (1979) 109–113.

[5] E. A. Emerson, *Automata, tableaux, and temporal logics (Extended abstract)*, w: Logics of Programs, LNCS **193** (1985) 79–88.

[6] E. A. Emerson i C. S. Jutla, *The complexity of tree automata and logics of programs*, w: Proc. of 29th Annual IEEE Symp. on Foundations of Computer Science (1988) 328-337.

[7] E. A. Emerson i C. S. Jutla, *Tree automata, mu-calculus and determinacy*, w: Proc. of 32nd Annual IEEE Symp. on Foundations of Computer Science (1991) 368-377.

[8] E. A. Emerson, C. S. Jutla i A. P. Sistla, *On model-checking for fragments of μ-calculus*, w: Proc. 5th Int. Conf. on Computer Aided Verification, LNCS **697** (1993) 383–396.

[9] Y. Gurevich i L. Harrington, *Trees, automata, and games*, w: Proc. of 14th Annual ACM Symp. on Theory of Computing (1982) 60–65.

[10] W. A. Gurwicz, A. W. Karzanow i L. H. Chaczijan, *Cikliczieskieje igry i nachoszdienie minimalnych srednich ciklow w orientirowannych grafach*, Żurnal Wyczislitielnoj Matiematiki i Matiematiczieskoj Fiziki **28** (1988) 1407–1417 (po rosyjsku).

[11] H. Lescow, *On polynomial-size programs winning finite-state games*, w: Proc. 7th Int. Conf. on Computer Aided Verification, LNCS **939** (1995) 239–252.

[12] H. Lescow, *On polynomial-size winning strategies in finite-state games*, praca doktorska na Uniwersytecie w Kilonii.

[13] N. Klarlund, *Progress measures, immediate determinacy, and a subset construction for tree automata*, w: Proc. of 7th Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science (1992) 382-393.

[14] O. Maler, A. Pnueli i J. Sifakis *On the synthesis of discrete controllers for timed systems*, w: Proc. of 12th Annual Symp. on Theoretical Aspects of Computer Science, LNCS **900** (1995) 229–242.

[15] R. McNaughton, *Infinite games played on finite graphs*, Ann. Pure Appl. Logic **65** (1993) 149–184.

[16] A. W. Mostowski, *Games with forbidden positions*, Technical Report 78, University of Gdańsk, 1991.

[17] A. Nerode, J. B. Remmel i A. Yakhnis, *McNaughton games and extracting strategies for concurrent programs*, Ann. Pure Appl. Logic **78** (1996) 203–242.

[18] A. Nerode, A. Yakhnis i V. Yakhnis, *Concurrent programs as strategies in games*, w: Y.N. Moschovakis, Editor, *Logic from Computer Science*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 21 (1992) 405–479.

[19] A. Pnueli i R. Rosner, *On the synthesis of a reactive module*, w: Proc. 16th Annual ACM Symp. on Principles of Programming Languages (1989) 179–190.

[20] W. Thomas, *On the synthesis of strategies in infinite games*, w: Proc. of 12th Annual Symp. on Theoretical Aspects of Computer Science, LNCS **900** (1995) 1–13.

[21] W. Zielonka, *Infinite games on finitely coloured graphs with applications to automata on infinite trees*, Technical Report, Universitè Bordeaux I, 1995, ukaże się w Theoret. Comput. Sci.

[22] U. Zwick, M. Paterson, *The complexity of mean payoff games on graphs*, Theoret. Comput. Sci. **158** (1996) 343–359.