

# Egzamin ze złożoności obliczeniowej

12 września 2013

*Rozwiązanie każdego zadania proszę pisać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce.*

1. Udowodnij, że następujący problem jest zupełny w klasie  $P$  ze względu na redukcje obliczalne w pamięci logarytmicznej.

**Dane:** gramatyka bezkontekstowa  $G$ .

**Rozstrzygnąć:** czy  $G$  generuje zbiór nieskończony.

**Uwaga.** Powyższy problem należy zakodować jako język nad skończonym alfabetem, pomimo że alfabet gramatyki  $G$  może być dowolnie duży. Można przyjąć, że symbole tego alfabetu są kodowane jako słowa binarne. Proszę określić kodowanie używane w rozwiązaniu (można posłużyć się ideą kodowania maszyn Turinga znaną z wykładu).

2. Udowodnij, że następujący problem jest zupełny w klasie  $NP$  w sensie Karpa.

**Dane:** gramatyka bezkontekstowa  $G$ .

**Rozstrzygnąć:** czy  $G$  generuje słowo zawierające wszystkie litery alfabetu.

Zasady kodowania jak w poprzednim zadaniu.

3. Dla słów o tej samej długości  $u = u_1 \dots u_n$  i  $v = v_1 \dots v_n$  nad pewnym alfabetem  $A$ , niech  $u \star v$  będzie słowem nad alfabetem  $A \times A$

$$u \star v = (u_1, v_1) \dots (u_n, v_n)$$

Udowodnij, że jeśli język  $L$  nad alfabetem  $A \times A$  jest w klasie  $DSPACE(\log(n))$ , to również język

$$L' = \{uv : u \star v \in L\}$$

należy do tej klasy.

4. Dla słów  $u$  i  $v$  (niekoniecznie tej samej długości) niech  $zip(u, v)$  oznacza ich przepłót, w którym koniec dłuższego słowa może „wystawać”. Dokładniej, dla  $u = u_1 \dots u_m$  i  $v = v_1 \dots v_n$ ,

$$zip(u, v) = \begin{cases} u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_m v_m v_{m+1} \dots v_n & \text{gdy } m \leq n \\ u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_n v_n u_{n+1} \dots u_m & \text{gdy } m > n \end{cases}$$

Udowodnij, że jeśli języki  $L$  i  $M$  należą do klasy  $BPP$ , to również język

$$zip(L, M) = \{zip(u, v) : u \in L, v \in M\}$$

należy do tej klasy.

5. Dla  $f : V \rightarrow V$  będącego automorfizmem grafu skierowanego  $G = (V, E)$ , oznaczamy

$$\#f = |\{v : f(v) \neq v\}|$$

Dla grafu  $G$  oznaczamy

$$\#G = \max\{\#f : f \text{ jest izomorfizmem } G\}$$

(Grafy z  $\#G = 0$  są nazywane sztywnymi.)

Udowodnij, że jeśli zachodzi równość klas  $P = NP$ , to funkcja  $G \mapsto \#G$  jest wielomianowo obliczalna.