

Złożoność obliczeniowa: klasówka

9 maja 2013

1. Przyjmijmy, że graf o wierzchołkach $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ jest reprezentowany jako ciąg n^2 bitów uzyskany przez wypisanie macierzy sąsiedztwa wiersz po wierszu. Skonstruuj taką rodzinę obwodów $\mathcal{C}$, że

- $\mathcal{C}$ rozpoznaje zbiór tych grafów (o co najmniej dwóch wierzchołkach), w których istnieje ścieżka z wierzchołka 1 do wierzchołka 2;
- rozmiar obwodu C_n jest wielomianowy ze względu na n ;
- głębokość obwodu C_n jest $\mathcal{O}(\log^2 n)$;
- bramki AND i OR są binarne.

Każdy komponent konstrukcji musi zostać opisany i opatrzony komentarzem, nawet jeśli był omawiany na ćwiczeniach.

Wskazówka: Może się przydać pomysł z dowodu twierdzenia Savitcha.

2. Pokaż, że następujący problem jest NP-zupełny: rozstrzygnąć, czy dwa dane binarne diagramy decyzyjne (BDD) nie są równoważne.

Uwaga: Przypomnienie definicji na odwrocie.

3. Rozważmy następujący problem: dla danego alfabetu A , liter $a, b \in A$, liczby n (zapisanej unarnie) i dwóch relacji $Step, BigStep \subseteq A \times A$, rozstrzygnąć, czy istnieje słowo $w = a_1 a_2 \dots a_{|w|} \in A^*$ spełniające warunki

- $a_1 = a, a_{|w|} = b$,
- $(a_i, a_{i+1}) \in Step$ dla każdego $i \leq |w| - 1$,
- $(a_i, a_{i+n}) \in BigStep$ dla każdego $i \leq |w| - n$.

Pokazać, że ten problem jest PSPACE-zupełny.

Binarny diagram decyzyjny (BDD, ang. *binary decision diagram*) D nad zbiorem zmiennych X to graf acykliczny skierowany, w którym krawędzie są etykietowane symbolami 0 lub 1, a wierzchołki są etykietowane zmiennymi ze zbioru X lub symbolami 0, 1, spełniający następujące warunki:

- jest dokładnie jeden wierzchołek o stopniu wejściowym 0 (wierzchołek początkowy),
- wszystkie wierzchołki mają stopień wyjściowy 0 lub 2,
- wierzchołki o stopniu wyjściowym 0 (wierzchołki końcowe) mają etykietę 0 lub 1,
- wierzchołki o stopniu wyjściowym 2 mają etykietę ze zbioru X oraz po jednej krawędzi wychodzącej z etykietą 0 i 1.

Danymi wejściowymi dla D jest wartościowanie zmiennych ze zbioru X . Diagram D rozpoczyna obliczenie w wierzchołku początkowym, a następnie porusza się zgodnie z wartością zmiennej stanowiącej etykietę bieżącego wierzchołka: jeśli etykietą wierzchołka jest x , to obliczenie przesuwa się po krawędzi z etykietą równą wartości zmiennej x . Jeśli etykietą wierzchołka jest 0, to obliczenie zatrzymuje się z wynikiem 0; analogicznie dla 1.

Diagramy D i D' (nad tym samym zbiorem zmiennych X) są równoważne, jeśli dają te same wyniki dla wszystkich wartościowań.