Egzamin poprawkowy ze złożoności obliczeniowej

4 września 2012

Każde zadanie proszę pisać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce.

1. (1 punkt) *Słowo z dziurami* nad alfabetem Σ to słowo $w \in (\Sigma \cup \{?\})^*$, gdzie ? jest specjalną literą nie należącą do Σ. Mówimy, że słowo $u \in \Sigma^*$ zawiera słowo z dziurami $w = w_0?w_1?w_2\ldots?w_n$, $w_i \in \Sigma^*$, jeśli istnieją $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Sigma$, dla których $w_0a_1w_1a_2w_2\ldots a_nw_n$ jest podsłowem (infiksem) u. Innymi słowy, dziura pasuje do dowolnej pojedynczej litery. Np. *bbaaacb* zawiera słowo $a??c$, a *aacba* nie zawiera $a??c$.

   Rozwiąż nastepujacy problem w PSPACE: Dla danego alfabetu Σ, liter $a, b \in \Sigma$ oraz zbioru zabronionych słów z dziurami Z, rozstrzygnij, czy istnieje słowo postaci $a\Sigma^*b$ nie zawierające żadnego z zabronionych słów.

2. (1 punkt) Udowodnij, że jeśli język L jest w BPP, to język $Cycle(L) = \{uv \mid vu \in L\}$ też.

3. (1 punkt) Wykaż, że następujący problem jest NP-zupełny: rozstrzygnij, czy dana formuła φ rachunku zdań jest spełnialna przez takie wartościowanie, że liczba zmiennych o wartości 1 jest podzielna przez 3.

4. (0,5 punktu) Przypuśćmy, że NP jest zawarte w P/poly. Wykaż, że wtedy istnieje ciąg obwodów rozmiaru wielomianowego, w którym n-ty obwód ma n wejść i n wyjść i jeśli na wejściu jest zapis binarny liczby K, to na wyjściu jest zapis binarny najmniejszego dzielnika liczby K większego od 1 (ewentualnie poprzedzony zerami).

5. Wskaż błąd w następujących rozumowaniach.

   (a) (0,25 punktu) Wykażemy, że każdy problem częściowo obliczalny jest w NP. Jeśli problem A jest częściowo obliczalny, to istnieje maszyna Turinga M, która akceptuje w wtedy i tylko wtedy gdy w należy do A (jeśli $w \notin A$, to M się nie zatrzymuje lub odrzuca w). Aby wykazać, że problem A w NP, wystarczy za świadka dla w wziąć ciąg konfiguracji maszyny M opisujący akceptujący bieg na w. Taki świadek oczywiście daje się zweryfikować w czasie wielomianowym względem jego długości.

   (b) (0,25 punktu) Pokażemy, że klasa PSPACE jest zawarta w NP. Dowolny algorytm PSPACE symulujemy tak: najpierw zgadujemy zawartość pamięci (jest wielomianowa) a potem już normalnie symulujemy obliczenie w czasie wielomianowym.