

Egzamin poprawkowy ze złożoności obliczeniowej

9 września 2014

Rozwiązania zadań 1–3 proszę pisać na oddzielnych, czytelnie podpisanych kartkach. Rozwiązanie zadania 4 proszę umieścić **na tej kartce** (można zaznaczyć odpowiednie miejsca w tekście). Każde zadanie jest warte 1 punkt.

1. Dla $u, v \in \{0, 1\}^*$, $|u| = |v|$, przez $u \oplus v$ oznaczamy wynik przeprowadzenia operacji *xor* po współrzędnych, np. $011 \oplus 010 = 001$. Dla $L, M \subseteq \{0, 1\}^*$ definiujemy

$$L \oplus M = \{u \oplus v \mid u \in L, v \in M, |u| = |v|\}.$$

Udowodnij, że istnieją takie języki $L, M \in \text{PTIME}$, że $L \oplus M$ jest NP-zupełny.

Wskazówka (opcjonalna): Rozważyć $L = \{0^n w \mid w \in \{0, 1\}^*, n = |w|\}$.

2. Dla języka $L \subseteq \{0, 1\}^*$ niech L' oznacza zbiór tych słów, które różnią się od pewnego słowa z L co najwyżej na pozycjach będących potęgami 2. Udowodnij, że jeśli $L \in \text{BPP}$, to $L' \in \text{BPP}$.
3. Zaprojektuj algorytm w LOGSPACE rozstrzygający, czy dana permutacja jest cyklem. Należy przyjąć, że permutacja π zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ jest zakodowana jako

$$\langle \pi(1) \rangle_n \# \langle \pi(2) \rangle_n \# \dots \# \langle \pi(n) \rangle_n$$

gdzie $\langle k \rangle_n$ to liczba k zapisana na $\lfloor \log n \rfloor + 1$ bitach (z dodatkowymi zerami wiodącymi).

4. Wskaż błąd w następujących rozumowaniach.
 - (a) Rozważmy dowolną maszynę M , niedeterministyczną, działającą w czasie wielomianowym. Niech M' powstaje z M przez zamianę stanów akceptujących na odrzucające i na odwrót. Wówczas bieg maszyny M na słowie w jest akceptujący wtedy i tylko wtedy gdy analogiczny bieg maszyny M' jest odrzucający, a więc maszyna M akceptuje w wtedy i tylko wtedy gdy M' odrzuca w . Z tego wynika, że $\text{NP} = \text{coNP}$.
 - (b) Problem osiągalności w grafie skierowanym jest zupełny w NL. Opiszemy deterministyczny algorytm rozstrzygający ten problem w pamięci logarytmicznej.
Mamy sprawdzić, czy istnieje ścieżka z wierzchołka s do t . Jeśli $s = t$ lub istnieje krawędź z s do t , odpowiadamy: TAK. W przeciwnym razie przeglądamy wszystkie wierzchołki x i rekurencyjnie sprawdzamy, czy istnieje ścieżka z s do x i ścieżka z x do t . Rekursja jest implementowana za pomocą stosu, ale kiedy stos osiągnie głębokość $1 + \log n$, przerywamy rekursję i odpowiadamy NIE. (Głębokość stosu można zapisywać na specjalnym liczniku.) Algorytm jest poprawny, bo jeśli t jest osiągalne z s , to uda się nam to stwierdzić po dokonaniu logarytmicznie wielu podziałów. A zatem udowodniliśmy, że $\text{L} = \text{NL}$.