

Złożoność Obliczeniowa – kolokwium

Zadanie 1 (5pkt.) Rozważmy następujący problem obliczeniowy:

Dane: Niedeterministyczny automat skończony A i słowo w nad alfabetem wejściowym tego automatu.

Pytanie: Czy A akceptuje w ?

Udowodnij, że ten problem daje się rozwiązać deterministycznie w pamięci

$$\mathcal{O}(\log(|A|) \cdot \log(|w|))$$

gdzie $|A|$ oznacza długość standardowej reprezentacji automatu A , a $|w|$ to długość w .

Wersja łatwiejsza, za 3 pkt.: udowodnij, że ten problem daje się rozwiązać deterministycznie w pamięci

$$\mathcal{O}(\log^2(|A| + |w|)).$$

Zadanie 2 (5 pkt.) Rozważmy język nad alfabetem $\{0, 1\}$ złożony z takich słów długości n^2 (dla $n \in \mathbb{N}$), które – zinterpretowane jako ciąg n liczb $m_1, \dots, m_n$ reprezentowanych binarnie, każda przez ciąg n bitów – mają tę własność, że suma $m_1 + \dots + m_n$ jest podzielna przez 3.

Udowodnij, że ten język jest w klasie $\mathbf{NC}^1$, tzn. daje się rozpoznać ciągiem (być może niejednorodnym) obwodów złożonych z bramek o arności co najwyżej 2, o wielomianowej liczbie bramek i głębokości logarytmicznej.

Zadanie 3 (5 pkt.) *Równaniem kwadratowym nad $\mathbb{Z}_2$ ze zmiennymi $x_1, \dots, x_n$ nazywamy równanie postaci*

$$x_{i_1}x_{j_1} + \dots + x_{i_m}x_{j_m} + x_{k_1} + \dots + x_{k_l} = b$$

dla dowolnych $m, l \in \mathbb{N}$, $i_1, j_1, \dots, i_m, j_m, k_1, \dots, k_l \in \{1, \dots, n\}$ i $b \in \{0, 1\}$.

Udowodnij, że zbiór tych układów równań kwadratowych, które mają rozwiązanie w $\mathbb{Z}_2$ (tj. modulo 2), jest $\mathbf{NP}$ -zupełny.

Na przykład, lewy układ poniżej ma rozwiązanie ($x_1 = x_2 = 0$) a prawy nie:

$$\begin{array}{ll} x_1x_2 = 0 & x_1x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 & x_1 + x_2 = 1 \end{array}$$