

Egzamin ze złożoności obliczeniowej, 31 sierpnia 2016

Zadania

Rozwiązania zadań 1,2,3 proszę pisać na oddzielnych, czytelnie podpisanych kartkach.

1. Powiemy, że formuła jest w postaci (2,3)-CNF, jeśli jest koniunkcją klauzul, z których każda zawiera 2 lub 3 literały. O wartościowaniu powiemy, że 2-spełnia taką formułę, jeśli każda klauzula złożona dwóch literałów jest spełniona w zwykłym sensie, natomiast w każdej klauzuli złożonej z trzech literałów, **dokładnie dwa** są prawdziwe. Na przykład formuła $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) \wedge (x \vee y \vee z)$ jest spełniona przez wartościowanie $x \mapsto 1, y \mapsto 1, z \mapsto 0$, a formuła $(x \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$ nie jest spełniona przez żadne wartościowanie.

Udowodnić, że następujący problem jest NP-zupełny:

Dla danej formuły w postaci (2,3)-CNF, rozstrzygnąć, czy istnieje wartościowanie, które 2-spełnia tę formułę.

2. Dla danego skończonego ciągu liczb naturalnych (nieposortowanego) i liczby i , mamy wskazać liczbę, która po posortowaniu znalazłaby się na i -tym miejscu. Udowodnić, że istnieje deterministyczna maszyna Turinga, która rozwiązuje ten problem, pracując w roboczej pamięci logarytmicznej. Zakładamy, że słowo wejściowe jest w postaci $w_1\# \dots \# w_k\#i$, gdzie $w_1, \dots, w_k$ oraz i są liczbami zapisanymi binarnie. Jeżeli format jest niewłaściwy (np. $i > k$), maszyna sygnalizuje błąd.

Wskazówka. Rozwiązać najpierw szczególny przypadek, kiedy w ciągu nie ma powtórzeń. (Rozwiązania ograniczone do tego przypadku też będą punktowane.)

3. Zakładamy, że lewy nawias jest reprezentowany przez 0, a prawy przez 1. Udowodnić, że język poprawnych wyrażeń nawiasowych jest w klasie AC^1 , tzn. może być rozpoznany przez ciąg obwodów o rozmiarze wielomianowym i głębokości logarytmicznej, przy dowolnym stopniu wejścia.

Uwaga. Można udowodnić silniejsze stwierdzenie, że interesujący nas język jest w klasie NC^1 .

Teoria

Rozwiązania zadań 4,5,6 można napisać na jednej (podpisanej) kartce.

4. Jakie zależności typu $=, \neq, \subseteq, \subset$, zachodzą pomiędzy następującymi klasami złożoności: NL, NP, BPP, DSPACE(n)? Odpowiedź należy zwięźle uzasadnić.

Uwaga. Im dokładniejsza informacja, tym lepiej, ale w niektórych przypadkach żadna zależność może nie być znana.

5. Udowodnij, że jeśli $P=NP$, to istnieje deterministyczna maszyna, pracująca w czasie wielomianowym, która dla danej liczby naturalnej $n > 1$, produkuje najmniejszą liczbę $d > 1$, która dzieli n .

6. Wskaż po jednym problemie zupełnym w klasach NL, P, PSPACE. Nie trzeba uzasadniać, ale należy uzupełnić brakujący szczegół w powyższym poleceniu.