

Egzamin ze złożoności obliczeniowej, 30 sierpnia 2017. Teoria – odpowiedzi.

Należy założyć, że definicja trudności i zupełności korzysta z redukcji w pamięci logarytmicznej.

1. Jeśli $L_1 \in \mathbf{NP}$ oraz $L_2 \in \mathbf{co-NP}$, to $L_1 \cup L_2 \in \mathbf{NP} \cup \mathbf{co-NP}$.

nie wiadomo

Przypuśćmy, że zdanie zachodzi. Niech L będzie językiem $\mathbf{NP}$ -zupełnym nad alfabetem $\{0, 1\}$, a K jego dopełnieniem, ale zapisanym nad alfabetem $\{a, b\}$. Przypuśćmy, że język $L \cup K$ (nad alfabetem $\{0, 1, a, b\}$) należy do $\mathbf{NP}$. Wtedy łatwo widzieć, że również język K (zupełny w $\mathbf{co-NP}$) należy do $\mathbf{NP}$, zatem $\mathbf{NP} = \mathbf{co-NP}$, co jest problemem otwartym. Przypuszczenie, że $L \cup K$ należy do $\mathbf{co-NP}$ daje ten sam efekt. Przypuśćmy z kolei, że zdanie nie zachodzi, czyli dla pewnych języków $L_1 \in \mathbf{NP}$ oraz $L_2 \in \mathbf{co-NP}$, $L_1 \cup L_2 \notin \mathbf{NP} \cup \mathbf{co-NP}$. Ponieważ klasa $\mathbf{NP}$ jest zamknięta na $\cup$, to implikowałoby, że $\mathbf{NP} \neq \mathbf{co-NP}$.

2. Istnieje algorytm rozstrzygający następujący problem: Czy dana maszyna Turinga M działa w pamięci ograniczonej przez funkcję stałą?

nie

Redukujemy (na przykład) problem stopu dla maszyny uniwersalnej, czyli pytanie " $U \downarrow (w) ?$ ". Możemy założyć, że U jest jednotaśmowa i nie zapętla się w ograniczonej pamięci. Dla danego w , konstruujemy maszynę M_w , która dla wejścia x długości n symuluje działanie U na w , tak jednak, by nie wyjść poza pamięć rozmiaru n – gdyby obliczenie miało wyjść poza tę pamięć, M_w zatrzymuje się. Jeśli obliczenie się zakończy, M_w nic więcej nie robi (w szczególności nie musi wykorzystać całej pamięci n). W takim przypadku maszyna M_w działa więc w pamięci stałej. Jeśli jednak obliczenie się nie zakończy (tzn. $U \uparrow (w)$), maszyna M_w działa w pamięci $\geq n$.

3. Istnieje problem $\mathbf{PSPACE}$ -zupełny należący do klasy $\mathbf{DSpace}(n)$.

tak

Taki problem możemy uzyskać z dowolnego problemu $\mathbf{PSPACE}$ -zupełnego przy pomocy techniki *padding*, por. analogiczny punkt w <https://www.mimuw.edu.pl/~niwinski/Zlozonosc/2017/zlo-test-2017-kolor.pdf>.

4. Istnieje problem $\mathbf{NP}$ -zupełny będący językiem regularnym.

nie wiadomo

Nie wiemy, czy $\mathbf{L} = \mathbf{NP}$. Gdyby tak było, to dowolny język z tej klasy różny od $\emptyset$ i języka pełnego byłby zupełny. Gdyby jednak $\mathbf{L} \neq \mathbf{NP}$, to taki język nie może istnieć, bo wszystkie języki regularne są w $\mathbf{L}$.

5. $\mathbf{BPP} \cap \mathbf{co-BPP} \subseteq \mathbf{NP}$.

nie wiadomo

Klasa $\mathbf{BPP}$ jest zamknięta na dopełnienia, tak więc $\mathbf{BPP} \cap \mathbf{co-BPP} = \mathbf{BPP}$. Zależność między klasami $\mathbf{BPP}$ i $\mathbf{NP}$ jest nieznana.

6. $\mathbf{CFL} \cup \mathbf{co-CFL} \subseteq \mathbf{DSpace}(n^2)$ (gdzie $\mathbf{CFL}$ jest klasą języków bezkontekstowych).

tak

Można próbować wprost, ale można też skorzystać z następujących faktów. Języki bezkontekstowe są kontekstowe, czyli w $\mathbf{NSpace}(n)$. Z twierdzenia Immermana-Szelepcsenyiego ta klasa jest zamknięta na dopełnienia, zatem również $\mathbf{co-CFL} \subseteq \mathbf{NSpace}(n)$. Konkluzja z twierdzenia Savitcha.

7. $\mathbf{DSpace}(n)$ jest ostro zawarte w $\mathbf{DTIME}(n^n)$.

tak

Mamy $\mathbf{DSpace}(n) \subseteq \bigcup_{c>0} \mathbf{DTIME}(c^n) \subseteq \mathbf{DTIME}(n^n)$. Żeby wykazać ostrość zawierania, wprowadźmy klasę „pośrednią”. Mamy np. $\bigcup_{c>0} \mathbf{DTIME}(c^n) \subseteq \mathbf{DTIME}(n^{n/2})$, ale ta ostatnia klasa jest ostro zawarta w $\mathbf{DTIME}(n^n)$, z twierdzenia o hierarchii, bo

$$\frac{n^n}{n^{n/2} \log n^{n/2}} \rightarrow \infty.$$

Por. https://www.mimuw.edu.pl/~niwinski/Zlozonosc/2016/complex_blog.pdf, Thm. 6.

8. Istnieje nierozstrzygalny język nad alfabetem jednoliterowym, należący do klasy $\mathbf{P/poly}$.

tak

Nawet więcej, każdy język nad alfabetem jednoliterowym jest w $\mathbf{P/poly}$.

9. $\mathbf{IP} \subseteq \mathbf{coNPSPACE}$.

tak

Oczywiście $\mathbf{co-NPSPACE} = \mathbf{PSPACE}$, a ta ostatnia klasa jest z twierdzenie Shamira równa $\mathbf{IP}$.

10. $\mathbf{AC}^k = \mathbf{NC}^{k+1}$ dla każdego $k \geq 0$.

nie

Równość nie zachodzi dla $k = 0$ (jak jest dalej, nie wiemy).