

Egzamin ze złożoności obliczeniowej, 19 czerwca 2017. Teoria – odpowiedzi.

1. Jeśli $L_1, L_2 \in \mathbf{NP} \cap \mathbf{co-NP}$, to $L_1 \dot{-} L_2 \in \mathbf{NP} \cap \mathbf{co-NP}$, gdzie $L_1 \dot{-} L_2$ (różnica symetryczna) zawiera słowa, które należą do dokładnie jednego z języków L_1, L_2 .

tak

Wynika łatwo z algebry zbiorów. Klasa $\mathbf{NP}$ jest zamknięta na binarną sumę i przecięcie, a część wspólna $\mathbf{NP} \cap \mathbf{co-NP}$ jest z definicji zamknięta na dopełnienie.

2. Istnieje algorytm, rozstrzygający następujący problem: Czy dana maszyna Turinga M działa w czasie ograniczonym przez $5 \cdot n$?

nie

Gdyby tak było, to moglibyśmy rozstrzygać np. pytanie, czy maszyna uniwersalna U akceptuje słowo wejściowe w . Określamy mianowicie maszynę M_w , tak że dla wejścia x długości n maszyna M_w symuluje $5 \cdot n$ kroków maszyny U na w . Jeśli obliczenie zakończy się w tym czasie akceptacją, to maszyna M_w się zapętla. Wtedy M_w spełnia ograniczenie czasowe $5 \cdot n$ dokładnie wtedy, gdy symulowane obliczenie U nigdy nie zakończy się akceptacją, czyli gdy U nie akceptuje w .

3. Istnieje problem $\mathbf{NP}$ -zupełny należący do klasy $\mathbf{NSPACE}(n)$.

tak

Żądany problem możemy uzyskać z dowolnego problemu $\mathbf{NP}$ -zupełnego L przy pomocy techniki *padding*, tzn. biorąc $L^\perp = \{w \perp^{p(n)} : w \in L\}$, gdzie $p(n)$ jest odpowiednim wielomianem.

4. Istnieje problem $\mathbf{PSPACE}$ -zupełny będący językiem regularnym.

nie

nie wiadomo

Uznajemy obie odpowiedzi, bo w zadaniu nie zostało sprecyzowane, o jakie redukcje chodzi. Problem zupełny w $\mathbf{PSPACE}$ ze względu na redukcje w **pamięci logarytmicznej** nie może istnieć, bo języki regularne są rozpoznawane w pamięci stałej, a więc tym bardziej w $\mathbf{L}$, a ta ostatnia klasa jest zamknięta na redukcje w pamięci logarytmicznej. Zatem istnienie $\mathbf{PSPACE}$ -zupełnego problemu należącego do $\mathbf{L}$ implikowałoby równość tych klas, co jest niemożliwe z twierdzenia o hierarchii.

Jednak, jeśli dopuści się redukcje w **czasie wielomianowym**, to przy założeniu, że $\mathbf{P} = \mathbf{PSPACE}$ (czego nie możemy wykluczyć!) każdy język różny od $\emptyset$ i od zbioru wszystkich słów jest zupełny.

5. $\mathbf{NP} \neq \mathbf{DTIME}(2^n)$.

tak

Znow technika *padding*. Przypuśćmy, że zachodzi równość i niech $L \in \mathbf{DTIME}(2^{n^2}) - \mathbf{DTIME}(2^n)$. Wtedy język $L' = \{w \perp^{|w|^2} : w \in L\}$ jest w $\mathbf{DTIME}(2^n)$, a zatem także w $\mathbf{NP}$ (z przypuszczenia $\supseteq$). Ale stąd łatwo skonstruować algorytm $\mathbf{NP}$ również dla oryginalnego języka L . Więc $L \in \mathbf{DTIME}(2^n)$ (z przypuszczenia $\subseteq$), wbrew założeniu.

6. $\mathbf{BPP} \cap \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{P}$.

nie wiadomo

Klasa $\mathbf{RP}$ jest zawarta w $\mathbf{BPP}$ i w $\mathbf{NP}$. Zatem odpowiedź pozytywna implikowałaby, że $\mathbf{P} = \mathbf{RP}$, czego nie wiemy. Natomiast odpowiedź negatywna implikowałaby, że $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

7. $\mathbf{CFL} \cap \mathbf{co-CFL} \subseteq \mathbf{P}$ (gdzie $\mathbf{CFL}$ jest klasą języków bezkontekstowych).

tak

Każdy język bezkontekstowy jest w $\mathbf{P}$ (algorytm CYK) a zatem jego dopełnienie również.

8. $\mathbf{NSPACE}(n \log n)$ jest ostro zawarte w $\mathbf{DSPACE}(n^3)$.

tak

Z twierdzenia Savitcha $\mathbf{NSPACE}(n \log n) \subseteq \mathbf{DSPACE}(n^2(\log n)^2)$, a z twierdzenia o hierarchii ta ostatnia klasa jest ostro zawarta w $\mathbf{DSPACE}(n^3)$.

9. Istnieje rozstrzygalny język w klasie $\mathbf{P}/\mathbf{poly}$, który nie jest w $\mathbf{PSPACE}$.

tak

Każdy język postaci $\{1^n : n \in A\}$, dla zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ jest w $\mathbf{P}/\mathbf{poly}$. Z twierdzenia o hierarchii nietrudno skonstruować taki język o dowolnie wysokiej złożoności pamięciowej. Np. jeśli język $L \subseteq \{0, 1\}^*$ nie jest w klasie $\mathbf{EXSPACE}$, to język $\{1^{\text{bin}(1^w)} : w \in L\}$ nie jest w $\mathbf{PSPACE}$ (gdzie $\text{bin}(x)$ oznacza wartość binarnej liczby x).

10. $\mathbf{co-RP} \subseteq \mathbf{P}/\mathbf{poly}$.

tak

Z twierdzenia Adlemana $\mathbf{BPP} \subseteq \mathbf{P}/\mathbf{poly}$, a z definicji $\mathbf{co-RP} \subseteq \mathbf{BPP}$.

11. Problem osiągalności w grafie skierowanym jest zupełny klasie $\mathbf{co-NL}$ (ze względu na redukcje w pamięci logarytmicznej).

tak

Ten problem jest zupełny w klasie $\mathbf{NL}$, ale z twierdzenia Immermana–Szelepcsényiego $\mathbf{NL} = \mathbf{co-NL}$.

12. $\mathbf{AC}^1 \subseteq \mathbf{NC}^2$.

tak

Wynika wprost z definicji tych klas, bo bramkę o dowolnym stopniu k wejścia można zastąpić drzewkiem bramek binarnych o głębokości $\log k$.