

Egzamin z logiki i teorii typów, 19 czerwca 2019

1. Która z następujących formuł zdaniowych jest twierdzeniem intuicjonistycznym?

- (a) $(p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow s) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow s) \rightarrow s$;
 (b) $(p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow s) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow s) \rightarrow (s \rightarrow r) \rightarrow r$.

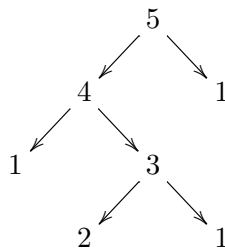
2. Która z następujących formuł pierwszego rzędu jest twierdzeniem intuicjonistycznym?

- (a) $\neg \forall x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg \neg P(x)$;
 (b) $\neg \exists x P(x) \rightarrow \neg \exists x \neg \neg P(x)$.

3. Typ $\tau = \forall p((p \rightarrow p \rightarrow \omega \rightarrow p) \rightarrow (\omega \rightarrow p) \rightarrow p)$ jest w systemie **F** odpowiednikiem typu indukcyjnego drzew binarnych etykietowanych liczbami naturalnymi:

`Inductive T : Set := kons : T -> T -> nat -> T | leaf : nat -> T.`

Na przykład term $T = \Lambda p \lambda f^{p \rightarrow p \rightarrow \omega \rightarrow p} \lambda x^{\omega \rightarrow p}. x \mathbf{3}$ to samotny liść oznaczony trójką, a drzewo $\lambda f^{p \rightarrow p \rightarrow \omega \rightarrow p} \lambda x^{\omega \rightarrow p}. f(f(x \mathbf{1})(f(x \mathbf{2})(x \mathbf{1}) \mathbf{3}) \mathbf{4})(x \mathbf{1}) \mathbf{5}$ widać na obrazku.



(a) Jakie operacje na drzewach są reprezentowane wyrażeniami:¹²

- $\lambda t:\tau. t\omega(\lambda p:\omega \lambda q:\omega \lambda x:\omega. p + q + x) \mathbf{I}$?
- $\lambda t:\tau. t\tau(\lambda p:\tau \lambda q:\tau \lambda x:\omega. p)(\lambda x:\omega. T)$?

(b) Napisać termy typu $\tau \rightarrow \omega$ reprezentujące takie funkcje:

- liczba liści drzewa;
- wysokość drzewa.

(c) Napisać term typu $\tau \rightarrow \tau$ reprezentujący operację wyzerowania wszystkich etykiet.

4. Dany jest automat dwulicznikowy o zbiorze stanów Q , stanie początkowym q_0 i końcowym q_f . Napisać formułę logiki pierwszego rzędu, która jest twierdzeniem intuicjonistycznym wtedy i tylko wtedy, gdy automat akceptuje konfigurację początkową $(q_0, 0, 0)$. Formuła powinna być efektywnie konstruowalna z automatu. Wskazówka: symbole relacyjne mogą reprezentować stany automatu. Można użyć symboli funkcyjnych dla następnika i zera.

¹Operacje na liczbach naturalnych są takie jak zwykle.

²Podpowiedź: pierwszą z funkcji w części 3a można w Coqu zdefiniować tak:

`Fixpoint F(t:T) : nat := match t with (kons t1 t2 k) => (F t1)+(F t2)+k | (leaf k) => k end.`

Rozwiązania

1a: Nie. Kontrmodel Kripkego składa się z trzech stanów a, b, c , gdzie $a \leq b, c$ ale stany b i c są nieporównywalne. Stan a nie wymusza żadnych atomów, natomiast $b \Vdash q, s$ oraz $c \Vdash p, s$. Wtedy formuła $p \rightarrow r$ jest wymuszona tylko w stanie b a formuła $q \rightarrow r$ jest wymuszona tylko w stanie c . A więc stan a wymusza wszystkie trzy założenia i nie wymusza konkluzji s .

Inny sposób: przyjmijmy $v(p) = (-\infty, 0), v(q) = (0, \infty), v(r) = \emptyset, v(s) = \mathbb{R} - \{0\}$ w algebrze otwartych podzbiorów prostej \mathbb{R} . Wtedy $\llbracket p \rightarrow r \rrbracket_v = \llbracket \neg p \rrbracket_v = (0, \infty) \subseteq \llbracket s \rrbracket_v$ i podobnie $\llbracket q \rightarrow r \rrbracket_v \subseteq \llbracket s \rrbracket_v$. Ponadto $\llbracket p \rightarrow q \rightarrow r \rrbracket_v = \llbracket p \wedge q \rightarrow r \rrbracket_v = \mathbb{R}$, tymczasem $\llbracket s \rrbracket_v \neq \mathbb{R}$.

1b: Tak, bo to jest typ termu: $\lambda x^{p \rightarrow q \rightarrow r} \lambda y^{(p \rightarrow r) \rightarrow s} \lambda z^{(q \rightarrow r) \rightarrow s} \lambda u^{s \rightarrow r} . u(y(\lambda v^p . u(z(\lambda w^q . xvw))))$.

Inny sposób: rozpatrzmy stan c modelu Kripkego, w którym wymuszone są wszystkie założenia, ale nie konkluzja r . Skoro $c \Vdash s \rightarrow r$, to $c \nVdash s$. Zatem $c \nVdash p \rightarrow r$, jest więc taki stan $d \geq c$, że $d \Vdash p$ oraz $d \nVdash r$, skąd też $d \nVdash s$. Wtedy także $d \nVdash q \rightarrow r$, jest więc taki stan $e \geq d$, że $e \Vdash q$ i $e \nVdash r$. Ale $e \Vdash p$ i mamy sprzeczność z powodu pierwszego założenia.

2a: Nie. Rozpatrzmy $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ -strukturę $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, P^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie $P^{\mathcal{A}}(r) = \mathbb{R} - \{r\}$ dla dowolnego $r \in \mathbb{R}$. Wtedy $\llbracket \forall x P(x) \rrbracket = \emptyset$, ale $\llbracket \forall x \neg P(x) \rrbracket = \mathbb{R}$, bo $\sim(\sim(\mathbb{R} - \{r\})) = \mathbb{R}$ dla każdego $r \in \mathbb{R}$. Zatem znaczeniem formuły $\neg \forall x P(x)$ jest cała prosta a znaczeniem formuły $\neg \forall x \neg P(x)$ jest zbiór pusty.

Inny sposób: rozpatrzmy model Kripkego o zbiorze stanów \mathbb{N} i stałych dziedzinach $D_n = \mathbb{N}$. Relację P zdefiniujemy w dziedzinie D_n jako zbiór $\{k \mid k \leq n\}$. Nie ma takiego stanu, który wymusza $\forall x P(x)$, bo zawsze jest element, który nie należy do relacji. Za to formuła $\forall x \neg \neg P(x)$ jest wymuszona w każdym stanie, bo każdy element prędzej czy później do relacji wpadnie.

2b: Tak. To jest typ takiego termu:

$$\lambda X^{\neg \exists x P(x)} \lambda Y^{\exists x \neg \neg P(x)} . \text{unpack } Y \text{ as } [a, V^{\neg \neg P(a)}] \text{ in } V(\lambda Z^{P(a)} . X[a, Z]^{\exists x P(x)}).$$

Inny sposób: rozpatrzmy dowolny model Kripkego i dowolny stan c . Jeśli $c \Vdash \neg \exists x P(x)$, to znaczy, że w każdym stanie $d \geq c$ relacja P jest pusta. Tymczasem $c \Vdash \exists x \neg \neg P(x)$ oznacza, że dla pewnego elementu a dziedziny D_c zachodzi $c, a \Vdash \neg \neg P(x)$, w szczególności $c, a \nVdash \neg P(x)$. Inaczej: element a musi w jakimś przyszłym stanie należeć do relacji P .

3a: Pierwsza operacja to suma wszystkich etykiet drzewa, druga to funkcja stale równa \top . Można to udowodnić przez indukcję, zauważając, że termy zamknięte M typu τ są (z dokładnością do $\beta\eta$ -konwersji) generowane przez taką pseudo-gramatykę:

$$M ::= \Lambda p \lambda f^{p \rightarrow p \rightarrow \omega \rightarrow p} \lambda x^{\omega \rightarrow p} . x \underline{k} \mid \Lambda p \lambda f^{p \rightarrow p \rightarrow \omega \rightarrow p} \lambda x^{\omega \rightarrow p} . f(M_1 p f x)(M_2 p f x) \underline{k}.$$

3b: Term $\lambda t : \tau . t \omega (\lambda p : \omega \lambda q : \omega \lambda x : \omega . p + q) (\lambda x : \omega . \underline{1})$ liczy liście, natomiast wysokość dostaniemy z pomocą termu $\lambda t : \tau . t \omega (\lambda p : \omega \lambda q : \omega \lambda x : \omega . 1 + \max\{p, q\}) (\lambda x : \omega . \underline{0})$

3c: Zdefiniujmy najpierw funkcje $\text{kons} = \lambda t : \tau \lambda s : \tau \lambda n : \omega . \Lambda p \lambda f^{p \rightarrow p \rightarrow \omega \rightarrow p} \lambda x^{\omega \rightarrow p} . f(tpfx)(spfx) \underline{n}$ i $\text{leaf} : \lambda n : \omega \Lambda p \lambda f^{p \rightarrow p \rightarrow \omega \rightarrow p} \lambda x^{\omega \rightarrow p} . \underline{n}$. Zerowanie etykiet można teraz napisać tak:

$$\lambda t : \tau . t \tau (\lambda y : \tau \lambda z : \tau \lambda u : \omega . \text{kons } y \ z \ \underline{0}) (\lambda u : \omega . \text{leaf } \underline{0}).$$

4: Formuła ma postać $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \perp$, a jej przesłanki α_i są następujące:

- $q_0(0, 0) \rightarrow \perp$ oraz $\forall xy(q_f(x, y))$;
- $\forall xy(p(s(x), y) \rightarrow q(x, y))$, dla instrukcji postaci „ $q : c_1 := c_1 + 1$; goto p ”;
- $\forall xy(p(x, s(y)) \rightarrow q(x, y))$, dla instrukcji postaci „ $q : c_2 := c_2 + 1$; goto p ”;
- $\forall xy(p(x, y) \rightarrow q(s(x), y))$, dla instrukcji postaci „ $q : c_1 := c_1 - 1$; goto p ”;
- $\forall xy(p(x, y) \rightarrow q(x, s(y)))$, dla instrukcji postaci „ $q : c_2 := c_2 - 1$; goto p ”;
- $\forall xy(p(0, y) \rightarrow q(0, y))$, oraz $\forall xy(r(s(x), y) \rightarrow q(s(x), y))$,
dla instrukcji postaci „ $q : \text{if } c_1 = 0 \text{ then goto } p \text{ else goto } r$ ”;
- $\forall xy(p(x, 0) \rightarrow q(y, 0))$, oraz $\forall xy(r(x, s(y)) \rightarrow q(x, s(y)))$,
dla instrukcji postaci „ $q : \text{if } c_2 = 0 \text{ then goto } p \text{ else goto } r$ ”.