

Podstawy matematyki – egzamin poprawkowy

19 lutego 2025

1. Niech $\varphi : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}_+(\mathbb{N})$ będzie taka że $\varphi(f) = f(\text{Rg}(f))$ dla dowolnego f .
- (a) Czy funkcja φ jest różnowartościowa? Czy jest na $\mathcal{P}_+(\mathbb{N})$?
 - (b) Jakiej mocy jest przeciwobraz rodziny wszystkich nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$?
 - (c) Jakiej mocy jest przeciwobraz rodziny wszystkich skończonych i niepustych podzbiorów $\mathbb{N}$?

2. Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie częściowym porządkiem. W zbiorze $\mathcal{P}_+(X)$ wszystkich niepustych podzbiorów X definiujemy relację $\sqsubseteq$ następująco:

$$S \sqsubseteq T \iff S = T \text{ lub (istnieją } s = \sup_{\leq} S \text{ oraz } t = \inf_{\leq} T \text{ i spełniają } s \leq t).$$

- (a) Udowodnić, że $\langle \mathcal{P}_+(X), \sqsubseteq \rangle$ jest częściowym porządkiem. Czy odpowiedź może się zmienić, gdyby zamiast $\mathcal{P}_+(X)$ rozważać cały zbiór potęgowy $\mathcal{P}(X)$?
- (b) Czy jeśli $\langle \mathcal{P}_+(X), \sqsubseteq \rangle$ jest dobrze ufundowany, to $\langle X, \leq \rangle$ jest dobrze ufundowany?
- (c) Czy jeśli $\langle X, \leq \rangle$ jest dobrze ufundowany, to $\langle \mathcal{P}_+(X), \sqsubseteq \rangle$ jest dobrze ufundowany?

3. Rodzina $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ spełnia następujące trzy warunki:

- (a) $\forall A, B (A \in \mathcal{S} \wedge B \subseteq A \rightarrow B \in \mathcal{S})$;
- (b) $\forall A (\mathcal{P}_2(A) \subseteq \mathcal{S} \rightarrow A \in \mathcal{S})$, w szczególności wszystkie singletony należą do $\mathcal{S}$;
- (c) $\forall x, z (x \neq z \wedge \{x, z\} \in \mathcal{S} \rightarrow \forall y (\{x, y\} \in \mathcal{S} \vee \{y, z\} \in \mathcal{S}))$.

Udowodnić, że istnieje taka funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, że dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N}$:

$$A \in \mathcal{S} \iff f \upharpoonright_A \text{ jest różnowartościowa.}$$

Uwagi:

1. Symbole $\mathcal{P}_+(Z)$ i $\mathcal{P}_2(Z)$ oznaczają odpowiednio rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów zbioru Z i rodzinę wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru Z .
2. Wiadomo, że rodzina wszystkich nieskończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ jest mocy continuum, a rodzina wszystkich skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ jest przeliczalna.

Rozwiązania

1a: Funkcja nie jest różnowartościowa choćby dlatego, że $\varphi(f) = \mathbb{N}$ dla każdej bijekcji f . Inny przykład: dla $f = \lambda n. \text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else } 1$ i $g = \lambda n. \text{if } n = 1 \text{ then } 0 \text{ else } 1$ mamy $f \neq g$ ale $\varphi(f) = \varphi(g) = \{0, 1\}$.

Jest to natomiast surjekcja na $P_+(\mathbb{N})$. Dla dowolnego niepustego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ rozpatrzmy funkcję $f_A = \lambda n. \text{if } n \in A \text{ then } n \text{ else } \min A$. Łatwo widzieć, że $\varphi(f) = A$.

1b: Jest to zbiór mocy continuum. Oszacowanie z góry jest oczywiste, bo zbiór $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest tej mocy. Ograniczenie z dołu wynika z części 1a i z tego, że rodzina $P_\infty(\mathbb{N})$ wszystkich nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ ma moc continuum. W rzeczy samej: skoro funkcja φ jest „na”, to w szczególności każdy zbiór nieskończony jest wartością funkcji φ . Zatem istnieje różnowartościowa funkcja $G : P_\infty(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} \varphi^{-1}(P_\infty(\mathbb{N}))$, na przykład $G = \lambda A. f_A$, gdzie f_A jest jak w części 1a.

1c: Ten przeciwobraz też jest mocy continuum i oszacowanie z góry też jest oczywiste. Dla oszacowania z dołu rozpatrzmy dowolny niepusty zbiór $A \subseteq \mathcal{P}\mathbb{r}$ (gdzie $\mathcal{P}\mathbb{r}$ oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych) i zdefiniujmy funkcję:

$$h_A = \lambda n. \text{if } n \in \mathcal{P}\mathbb{r} \text{ then } \min A \text{ else if } n - 1 \in A \text{ then } n - 1 \text{ else } \min A.$$

Zauważmy, że $\text{Rg}(h_A) = A$ oraz że $\varphi(h_A) = h_A(\text{Rg}(h_A)) = \{\min A\}$, czyli $\varphi(h_A)$ jest zbiorem skończonym. W ten sposób każdemu niepustemu zbiorowi $A \subseteq \mathcal{P}\mathbb{r}$ przyporządkowaliśmy pewną funkcję h_A należącą do naszego przeciwobrazu. Różnowartościowość tego przyporządkowania wynika stąd, że każda z tych funkcji ma inny zbiór wartości. Ponieważ zbiór $P_+(\mathcal{P}\mathbb{r})$ jest mocy continuum, możemy skorzystać z twierdzenia Cantora-Bernsteina.

2a: Zwrotność wynika wprost z definicji. Antysymetria: jeżeli $S \sqsubseteq T \sqsubseteq S$, to albo od razu $T = S$, albo dla dowolnych $s \in S$, $t \in T$ (S i T są niepuste) mamy $s \leq t \leq s$, czyli $s = t$. Wobec tego S i T są tym samym singletonem. Przechodniość: jeżeli $S \sqsubseteq T \sqsubseteq U$ oraz $S \neq T \neq U$ (przypadek z co najmniej jedną równością jest oczywisty), to wystarczy wziąć $t \in T$ (znów: T niepusty), aby przekonać się, że $\sup S \leq \inf T \leq t \leq \sup T \leq \inf U$, czyli $S \sqsubseteq U$. Założenie o niepustości jest istotne: na przykład gdyby w X istniały elementy najmniejszy i największy, to $\emptyset \sqsubseteq \{x\} \sqsubseteq \emptyset$ dla każdego $x \in X$.

2b: Tak. Jeśli w $\langle X, \leq \rangle$ istnieje nieskończony ciąg malejący $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$, to ciąg singletonów $\{x_0\} \sqsupset \{x_1\} \sqsupset \{x_2\} \sqsupset \dots$ jest malejący w $\langle P_+(X), \sqsubseteq \rangle$.

2c: Znowu tak. Przypuśćmy, że w $\langle P_+(X), \sqsubseteq \rangle$ istnieje nieskończony ciąg ściśle malejący

$$S_0 \sqsupset S_1 \sqsupset S_2 \sqsupset S_3 \sqsupset \dots$$

Dla każdego $i \in \mathbb{N}$ niech $s_i = \inf S_i$ (dobrze określone, bo $S_i \sqsubset S_{i+1}$). Wówczas

$$s_0 \geq s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots$$

Równość $s_i = s_{i+1}$ oznaczałaby, że $S_{i+1} = \{s_{i+1}\}$, więc w powyższym ciągu nigdy nie będzie dwóch równości z rzędu. To oznacza, że np. podciąg o indeksach parzystych jest ściśle malejący, wbrew założeniu, że $\langle X, \leq \rangle$ jest dobrze ufundowany.

3: Rozpatrzmy relację $r = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y \vee \{x, y\} \notin \mathcal{S}\}$ i zauważmy, że jest to relacja równoważności. Zwrotność i symetria wynikają wprost z definicji, a przechodniość z warunku 3c, który można równoważnie zapisać w postaci:

$$\forall x, z (\exists y (\{x, y\} \notin \mathcal{S} \wedge \{y, z\} \notin \mathcal{S}) \rightarrow x = z \vee \{x, z\} \notin \mathcal{S}).$$

Relacja r jest jądrem jakiegoś przekształcenia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{X}$; udowodnimy, że dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N}$:

$$A \in \mathcal{S} \Leftrightarrow f|_A \text{ jest różnowartościowa.}$$

($\Rightarrow$) Niech $A \in \mathcal{S}$ i niech $x, y \in A$ oraz $x \neq y$. Należy pokazać, że $f(x) \neq f(y)$. Ale z warunku 3a wynika, że $\{x, y\} \in \mathcal{S}$, więc $\langle x, y \rangle \notin r$. Skoro r jest jądrem funkcji f , to $f(x) \neq f(y)$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że funkcja $f|_A$ jest różnowartościowa. To znaczy, że żadne dwa elementy zbioru A nie są w relacji r , czyli $P_2(A) \subseteq \mathcal{S}$. Zatem $A \in \mathcal{S}$ na mocy 3b.