

Podstawy matematyki – egzamin
30 stycznia 2026

1. Relacja r w zbiorze $P(\mathbb{N}_+)$ (gdzie $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$) jest określona tak: $X r Y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy¹ $(\forall n \in X \exists m \in Y. n \mid m) \wedge (\forall n \in Y \exists m \in X. n \mid m)$
 - (a) Udowodnić, że r jest relacją równoważności.
 - (b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $P(\mathbb{N}_+)/r$?
 - (c) Jakiej mocy jest klasa abstrakcji relacji r wyznaczona przez zbiór $D = \{10\}$?
 - (d) Jakiej mocy jest klasa wyznaczona przez zbiór $E = \{2p \mid p \text{ jest liczbą pierwszą}\}$?
 - (e) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji relacji r .
2. Niech $\sqsubseteq$ będzie relacją w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ określoną następująco:
$$f \sqsubseteq g \iff \forall n \in \mathbb{N} (f(n) \leq g(n) \wedge f(\{0, \dots, n\}) \subseteq g(\{0, \dots, n\})).$$
Wiadomo, że relacja $\sqsubseteq$ jest porządkiem częściowym.
 - (a) Czy porządek $\sqsubseteq$ jest dobrze ufundowany?
 - (b) Jakiej mocy jest zbiór wszystkich elementów minimalnych w tym porządku?
 - (c) Jakiej mocy jest zbiór wszystkich elementów maksymalnych w tym porządku?
 - (d) Czy w tym porządku istnieje nieprzeliczalny antyłańcuch?
3. Zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ nazwijmy *matecznikiem* funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, gdy spełnia dwa warunki: po pierwsze $f(A) = \text{Rg}(f)$, po drugie, jeśli $B \subsetneq A$, to $f(B) \neq \text{Rg}(f)$. Przez $\mathcal{M}(f)$ oznaczmy zbiór wszystkich mateczników funkcji f .
 - (a) Udowodnić, że jeśli $A, B \in \mathcal{M}(f)$, to $A \sim B$.
 - (b) Znaleźć przeciwobraz rodziny $\{\mathcal{R} \in P(P(\mathbb{N})) \mid \overline{\overline{\mathcal{R}}} \leq 1\}$ przy operacji $\mathcal{M}$.
 - (c) Znaleźć przeciwobraz rodziny $\{\mathcal{R} \in P(P(\mathbb{N})) \mid \forall A \in \mathcal{R}. \overline{\overline{A}} \leq 1\}$ przy $\mathcal{M}$.
 - (d) Jaka jest moc zbioru $\text{Rg}(\mathcal{M})$?

Uwaga: Wiadomo, że rodziny: wszystkich iniekcji, wszystkich surjekcji i wszystkich bijekcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ są mocy continuum.

¹Przyjmujemy, że $k \mid \ell$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists r \in \mathbb{N}. \ell = k \cdot r$.

Rozwiązania

1a: Ta relacja jest jądrem operacji $D : P(\mathbb{N}_+) \rightarrow P(\mathbb{N}_+)$, gdzie $D(X) = \{n \mid \exists m(m \in X \wedge n \mid m)\}$, a zatem jest relacją równoważności. Istotnie, przypuśćmy, że $X r Y$ i niech $n \in D(X)$. Wtedy $n \mid m$, dla pewnego $m \in X$. Z definicji r wynika, że $m \mid k$ dla pewnego $k \in Y$, a stąd $n \mid k \in Y$, co właśnie znaczy, że $n \in D(Y)$. A więc $D(X) \subseteq D(Y)$ i analogicznie $D(Y) \subseteq D(X)$. Stąd $\langle X, Y \rangle \in \ker(D)$. Teraz założmy, że $\langle X, Y \rangle \in \ker(D)$, czyli $D(X) = D(Y)$ i pokażmy, że $X r Y$. Niech więc $n \in X$. Ponieważ $X \subseteq D(X) = D(Y)$, więc istnieje takie $m \in Y$, że $n \mid m$. Analogicznie sprawdzimy drugą część warunku.

1b: Zbiór ilorazowy jest co najwyżej mocy continuum, bo taka jest moc przeciwdziedziny funkcji D . Jest co najmniej tej mocy, bo każdy podzbiór zbioru liczb pierwszych wyznacza osobną klasę abstrakcji (czyli $\lambda X [X]_r : P(\text{Pierwsze}) \xrightarrow{1-1} P(\mathbb{N}_+)/_r$). Istotnie: dla $X \in P(\text{Pierwsze})$ mamy $D(X) = X \cup \{1\}$. Jeśli więc zbiory $X, Y \in P(\text{Pierwsze})$ są różne, to także $D(X) \neq D(Y)$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika, że zbiór $P(\mathbb{N}_+)/_r$ ma dokładnie moc $\mathfrak{C}$.

1c: Zbiór $\{10\}$ wyznacza ośmioelementową klasę abstrakcji. Jej elementy to wszystkie podzbiory zbioru $D(\{10\}) = \{1, 2, 5, 10\}$, do których należy liczba 10.

1d: Zbiór E wyznacza klasę abstrakcji mocy continuum. Ograniczenie górne jest oczywiste. Dla pokazania ograniczenia dolnego rozpatrzmy funkcję $h : P(\text{Pierwsze}) \xrightarrow{1-1} [E]_r$, określoną następująco: $h(X) = X \cup E$. Funkcja h jest dobrze określona. Po pierwsze dlatego, że każdy element $n \in h(X)$ dzieli jakiś element $m \in E$ (jeśli $n \in X$, to $n \mid 2n \in E$, gdyż $n \in \text{Pierwsze}$, a w przeciwnym razie n dzieli sam siebie). A po drugie, każdy element $E \subseteq X \cup E$ też dzieli sam siebie. Różnowartościowość h jest oczywista, gdyż zbiory Pierwsze i E są rozłączne.

1e: Weźmy zbiór $A \subseteq \mathbb{N}_+$ i niech $M \subseteq A$ to będzie zbiór jego elementów maksymalnych ze względu na relację podzielności. Zauważmy, że jeśli $B r A$, to $M \subseteq B$. Jeśli bowiem $m \in M$, to $m \mid n$ dla pewnego $n \in B$, a ponieważ n dzieli jakieś $k \in A$, to także $m \mid k$. Z maksymalności m wynika $m = n = k$, więc $m \in B$.

Przypadek 1: każdy element $A - M$ jest dzielnikiem jakiegoś elementu maksymalnego. Wtedy $D(A) = D(M)$, co więcej dla dowolnego zbioru B zachodzi równoważność

$$D(B) = D(A) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } M \subseteq B \subseteq D(M).$$

Inaczej, $[A]_r = \{X \cup M \mid X \subseteq D(M) - M\}$ i jest to zbiór równoliczny z $P(D(M) - M)$. Jeśli zbiór $D(M) - M$ jest mocy $\mathfrak{m}$, to nasza klasa ma moc $2^{\mathfrak{m}}$.

Jeśli A jest zbiorem skończonym, to $\mathfrak{m}$ też jest skończone. Co więcej, dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ zbiór $A = \{1, 2, 4, \dots, 2^m\}$ wyznacza klasę mocy 2^m . Istotnie, w tym przypadku $M = \{2^m\}$, $D(M) = D(A) = A$ oraz $D(M) - M$ ma dokładnie m elementów. Zatem skończone moce klas to wszystkie liczby postaci 2^m , a klasy nieskończone muszą być mocy $2^{\aleph_0}$, bo zbiór $D(M) - M$ jest przecież przeliczalny.

Przypadek 2: Istnieje jakieś $a_0 \in A$, które nie jest dzielnikiem żadnego elementu maksymalnego. Łatwo widzieć, że wtedy istnieje nieskończony ciąg $a_0, a_1, a_2, \dots$ elementów A , rosnący w sensie relacji podzielności (czyli $a_i \neq a_{i+1}$ oraz $a_i \mid a_{i+1}$ dla wszystkich i). Funkcja $H : P(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} [A]_r$ może być określona na przykład tak: $H(X) = A - \{a_{2x} \mid x \in X\}$. Ponieważ funkcja H jest dobrze określona (dla każdego $X \in P(\mathbb{N})$ zachodzi $H(X) r A$) i różnowartościowa, więc moc klasy $[A]_r$ jest ograniczona z dołu przez continuum, a zatem i równa continuum.

2a: Relacja $\sqsubseteq$ nie jest dobrze ufundowana, bo ciąg $f_i = \lambda n. \text{if } n \leq i \text{ then } 0 \text{ else } 1$ jest malejący, tj. $f_{i+1} \not\sqsubseteq f_i$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$. Oczywiście $f_{i+1}(n) \leq f_i(n)$ dla wszystkich $i, n \in \mathbb{N}$. Nadto, $f_{i+1}(\{0, \dots, n\}) = \{0\} = f_i(\{0, \dots, n\})$, dla $n \leq i$, natomiast w przeciwnym przypadku $f_{i+1}(\{0, \dots, n\}) \subseteq \{0, 1\} = f_{i+1}(\{0, \dots, n\})$. (Nb. jeśli w definicji f_i zmienimy $\leq$ na $<$, to $f_0 \not\sqsubseteq f_1$.)

2b: Elementy minimalne to dokładnie funkcje nierosnące. Zbiór tych funkcji jest mocy $\aleph_0$.

Założmy najpierw, że funkcja f jest minimalna ze względu na $\sqsubseteq$. Pokażemy przez indukcję, że $f(k+1) \leq f(k)$ dla $k \in \mathbb{N}$. Przypuśćmy więc, że teza zachodzi dla $k < n$. Niech teraz $g(n) = f(n)$ dla wszystkich $n \neq k+1$ i niech $g(k+1) = \min\{f(k), f(k+1)\}$. Nietrudno sprawdzić, że $g \sqsubseteq f$, a skoro f jest minimalna, to $g = f$. Ale to znaczy, że $f(k+1) \leq f(k)$.

Pozostaje wykazać, że funkcje nierosnące są elementami minimalnymi. Rozpatrzmy taką funkcję f i założmy, że $g \sqsubseteq f$. Pokażemy równość $g(n) = f(n)$ przez indukcję ze względu na n . Dla $n = 0$ teza wynika natychmiast z warunku $\{g(0)\} \subseteq \{f(0)\}$. Założmy teraz, że dla dowolnego $i < n$ zachodzi $g(i) = f(i)$. Skoro $g \sqsubseteq f$, to $g(n) \leq f(n)$ oraz $g(\{0, \dots, n\}) \subseteq f(\{0, \dots, n\})$, więc $g(n) \in f(\{0, \dots, n\})$. Elementem najmniejszym tego zbioru jest $f(n)$, bo funkcja f jest nierosnąca. Zatem $g(n) \geq f(n)$ i mamy równość.

2c: Zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ jest mocy continuum. Jeśli więc wskażemy rodzinę elementów maksymalnych mocy continuum, to z tw. Cantora-Bernsteina wywnioskujemy, że zbiór wszystkich elementów maksymalnych też jest mocy $\mathfrak{C}$. A taką rodzinę tworzą funkcje różnowartościowe.

Niech f będzie funkcją różnowartościową i niech $f \sqsubseteq g$. Przez indukcję ze względu na n pokażemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $f(n) = g(n)$. Dla $n = 0$ jest to oczywiste; w kroku indukcyjnym wiemy, że zbiory $f(\{0, \dots, n-1\})$ i $g(\{0, \dots, n-1\})$ są n -elementowe i równe. Skoro więc $f(\{0, \dots, n\}) \subseteq g(\{0, \dots, n\})$, a zbiór $f(\{0, \dots, n\})$ ma $n+1$ elementów, to $g(\{0, \dots, n\})$ też musi mieć (co najmniej) $n+1$ elementów. No to $g(n)$ musi być równe „nowemu” elementowi $f(n)$. A zatem udowodniliśmy, że każda funkcja różnowartościowa jest elementem maksymalnym w $\sqsubseteq$. (Tak naprawdę zachodzi również implikacja odwrotna, w naszym dowodzie niepotrzebna.)

2d: Tak, na przykład rodzina wszystkich iniekcji (por. 2c).

3a: Niech $A \in \mathcal{M}(f)$. Wiemy, że $f(A) = \text{Rg}(f)$. Ponadto funkcja $f|_A$ jest różnowartościowa. W rzeczy samej, jeśli $f(a) = f(b)$ dla pewnych $a, b \in A$, to A nie jest matecznikiem, bo $f(A - \{a\}) = f(A) = \text{Rg}(f)$. A zatem $f|_A : A \xrightarrow{1-1}_{\text{na}} \text{Rg}(f)$, czyli każdy matecznik jest równoliczny ze zbiorem wartości funkcji.

3b: Przeciwwobraz rodziny $\{\mathcal{R} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \mid \overline{\overline{\mathcal{R}}} \leq 1\}$ przy operacji $\mathcal{M}$ to zbiór wszystkich funkcji, które mają co najwyżej jeden matecznik. Każda funkcja ma co najmniej jeden: wystarczy dowolny selektor ilorazu jądra (taki zbiór, do którego należy dokładnie po jednym elemencie z każdej klasy jądra funkcji f). Pozostaje więc pytanie kiedy jest tylko jeden. Otóż wtedy, gdy funkcja jest różnowartościowa. Każda klasa jądra takiej funkcji ma tylko jeden element, więc selektor można wybrać tylko na jeden sposób. A jeśli funkcja nie jest iniekcją, czyli $f(a) = f(b) = k$ dla pewnych a, b, k , to istnieją co najmniej dwa mateczniki: należy wybrać po jednym elemencie z każdej klasy $f^{-1}(\{n\})$ dla $n \neq k$ i dodać do nich albo a albo b . Zatem szukany przeciwwobraz to zbiór wszystkich funkcji różnowartościowych.

3c: Teraz pytamy o zbiór wszystkich funkcji, które mają tylko mateczniki co najwyżej jednoelementowe. W części 3a pokazaliśmy, że mateczniki są równoliczne ze zbiorem wartości funkcji. Taki zbiór $\text{Rg}(f)$ nigdy nie jest pusty, a ma jeden element wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest stała. Zatem szukany przeciwwobraz to zbiór wszystkich funkcji stałych.

3d: Rodzina $\text{Rg}(\mathcal{M})$ to rodzina wszystkich rodzin postaci $\mathcal{M}(f)$. Ponieważ dziedziną funkcji $\mathcal{M}$ jest zbiór $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ o mocy continuum, więc zbiór wartości jest co najwyżej tej mocy. Pokażemy, że zbiór $\mathcal{M}(f)$ jest też co najmniej mocy $\mathfrak{C}$. Zdefiniujemy funkcję $\Theta : \mathcal{P}(\mathbb{N}_+) \xrightarrow{1-1} \text{Rg}(\mathcal{M})$ w ten sposób: dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N}_+$ niech $\theta_A = \lambda n. \text{ if } n \in A \text{ then } n \text{ else } 0$ i niech $\Theta(A) = \mathcal{M}(\theta_A)$. Sprawdzamy różnowartościowość: niech na przykład $a \in A - B$ gdzie $A, B \subseteq \mathbb{N}_+$. Wtedy zbiór $A \cup \{0\}$ jest matecznikiem funkcji θ_A , ale nie jest matecznikiem funkcji θ_B , bo $\theta_B(a) = 0 = \theta_B(0)$.