

Podstawy matematyki dla informatyków

Wykład 11

8 stycznia 2026

- ▶ Reguły *wprowadzania* spójników logicznych: jak można udowodnić formułę danej postaci?
- ▶ Reguły *eliminacji* spójników: jak można wykorzystać formułę tej postaci do udowodnienia innej?

Dowód formalny

Dowód formalny osądu $\Gamma \vdash \varphi$ w naturalnej dedukcji, to drzewo skończone, w którym każdemu wierzchołkowi przypisano pewien osąd. Przy tym:

- ▶ Korzeniowi drzewa przypisano osąd $\Gamma \vdash \varphi$.
- ▶ Osąd przypisany dowolnemu wierzchołkowi powstaje z osądów przypisanych jego dzieciom poprzez zastosowanie jednej z reguł wnioskowania.
- ▶ Liściom przypisano osady postaci $\Delta, \alpha \vdash \alpha$.

Dowód osądu $\vdash \varphi$ nazywamy *dowodem formuły* φ .

Reguły wnioskowania: aksjomat i implikacja

$$\Gamma, \varphi \vdash \varphi \quad (\text{Ax})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad (\text{W}\rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B} \quad (\text{E}\rightarrow)$$

Reguły dla koniunkcji

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad (\text{W}\wedge)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \quad (\text{E}\wedge)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \quad (\text{E}\wedge)$$

Reguły dla alternatywy

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad (\text{W}\vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad (\text{W}\vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \quad (\text{E}\vee)$$

Reguły dla prawdy, fałszu i negacji

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \quad (\text{W}\top)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \quad (\text{E}\perp)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \quad (\text{W}\neg)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \perp} \quad (\text{E}\neg)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \quad (\text{E}\neg\neg)$$

Poprawność i pełność (dla rachunku zdań)

Twierdzenie (o pełności)

- ▶ System naturalnej dedukcji jest *poprawny*: Jeśli formuła ma dowód (jest *twierdzeniem*) to jest tautologią.
- ▶ System naturalnej dedukcji jest *pełny*: Każda tautologia ma dowód.

Poprawność

Twierdzenie: Jeśli osąd $\Gamma \vdash \alpha$ ma dowód, to $\Gamma \models \alpha$.

Dowód: Dowód jest przez indukcję ze względu na wielkość... dowodu $\Gamma \vdash \alpha$.

Rozważamy kilka przypadków, zależnie od ostatniej użytej reguły.

I o tym już była mowa w grudniu.

Ale jak udowodnić pełność?

Można użyć lematu Kalmára. Zaleta: dowód jest prosty.

Wada: działa tylko dla klasycznego rachunku zdań.

No i o tym też już była mowa w grudniu.

Użyjmy dla odmiany metody algebraicznej

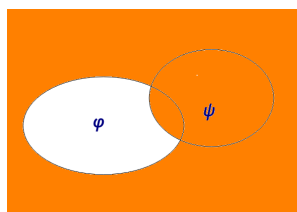
Najpierw takie ćwiczenie. Znaczeniem formuł, zamiast zer i jedynek, niech będą na przykład podzbiory płaszczyzny.

Interpretacja ϖ jest taka, że $\varpi(p) \subseteq \mathbb{R}^2$ dla każdego symbolu zdaniowego p .

- ▶ $\llbracket \perp \rrbracket_{\varpi} = \emptyset$ oraz $\llbracket \top \rrbracket_{\varpi} = \mathbb{R}^2$;
- ▶ $\llbracket p \rrbracket_{\varpi} = \varpi(p)$, gdy p jest symbolem zdaniowym;
- ▶ $\llbracket \neg \alpha \rrbracket_{\varpi} = -\llbracket \alpha \rrbracket_{\varpi}$ (dopełnienie);
- ▶ $\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket_{\varpi} = \llbracket \alpha \rrbracket_{\varpi} \cup \llbracket \beta \rrbracket_{\varpi}$;
- ▶ $\llbracket \alpha \wedge \beta \rrbracket_{\varpi} = \llbracket \alpha \rrbracket_{\varpi} \cap \llbracket \beta \rrbracket_{\varpi}$;
- ▶ $\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket_{\varpi} = -\llbracket \alpha \rrbracket_{\varpi} \cup \llbracket \beta \rrbracket_{\varpi}$

Znaczenie implikacji

$$\llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket_{\varpi} = -\llbracket \varphi \rrbracket_{\varpi} \cup \llbracket \psi \rrbracket_{\varpi}$$



Ćwiczenie

Formuła φ jest tautologią klasycznego rachunku zdań wtedy i tylko wtedy, gdy $\llbracket \varphi \rrbracket_{\varpi} = \mathbb{R}^2$ przy każdej interpretacji ϖ na płaszczyźnie.

Szkic dowodu ($\Leftarrow$) Jeśli ϱ jest interpretacją zerjedynkową, to weźmy $\varpi(p) = \mathbb{R}^2$ gdy $\varrho(p) = 1$ oraz $\varpi(p) = \emptyset$, gdy $\varrho(p) = 0$.

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnej formuły ψ zachodzą równoważności:

$$\llbracket \psi \rrbracket_{\varpi} = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \llbracket \psi \rrbracket_{\varrho} = 1 \quad \text{ i } \quad \llbracket \psi \rrbracket_{\varpi} = \emptyset \Leftrightarrow \llbracket \psi \rrbracket_{\varrho} = 0$$

A więc $\llbracket \varphi \rrbracket_{\varrho} = 1$.

Ćwiczenie

Formuła φ jest tautologią klasycznego rachunku zdań wtedy i tylko wtedy, gdy $\llbracket \varphi \rrbracket_{\varpi} = \mathbb{R}^2$ przy każdej interpretacji ϖ na płaszczyźnie.

Szkic dowodu ($\Rightarrow$) Teraz weźmy jakąś interpretację ϖ na płaszczyźnie i dowolny punkt $A \in \mathbb{R}^2$. Rozpatrzmy interpretację zerjedynkową ϱ :

$\varrho(p) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \varpi(p)$.

Przez łatwą indukcję udowodnimy, że

$\llbracket \varphi \rrbracket_{\varrho} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \llbracket \varphi \rrbracket_{\varpi}$.

Ale φ jest tautologią i A jest dowolny, więc $\llbracket \varphi \rrbracket_{\varpi} = \mathbb{R}^2$.

Jak to można uogólnić?

Obserwacja 1: W naszym ćwiczeniu użyliśmy rodziny zbiorów $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Tak samo będzie dla każdej rodziny $\mathcal{P}(X)$, i nie tylko. Wystarczy jakiegokolwiek *ciało zbiorów*.

Ciało zbiorów to taka rodzina zbiorów $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$, że:

- ▶ $\emptyset, X \in \mathcal{R}$;
- ▶ jeśli $A, B \in \mathcal{R}$, to także $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{R}$;
- ▶ jeśli $A \in \mathcal{R}$, to także $-A \in \mathcal{R}$.

(Dowód taki sam.)

Obserwacja 2: To w ogóle nie muszą być zbiory. Można wziąć dowolną *algebrę Boole'a*.

Algebra Boole'a to uporządkowany zbiór $\langle B, \leq \rangle$ z elementem najmniejszym 0 i największym 1 , w którym są określone dwa działania dwuargumentowe $\cup$ i $\cap$ i jedno jednoargumentowe działanie $-$, w ten sposób, że dla każdych $a, b, c \in B$:

- ▶ $a \cap b$ jest kresem dolnym podzbioru $\{a, b\}$;
- ▶ $a \cup b$ jest kresem górnym podzbioru $\{a, b\}$;
- ▶ $a \cup -a = 1$ i $a \cap -a = 0$;
- ▶ $a \cap (b \cup c) \leq (a \cap b) \cup (a \cap c)$.

Oczywiście każde ciało zbiorów jest algebrą Boole'a.

Twierdzenie Stone'a o reprezentacji Każda algebra Boole'a jest izomorficzna z pewnym ciałem zbiorów.

Wniosek

Formuła jest tautologią klasycznego rachunku zdań wtedy i tylko wtedy, gdy przyjmuje wartość 1 przy dowolnej interpretacji w dowolnej algebrze Boole'a.

Ale czy ta relacja

$$[\alpha]_{\sim} \leq [\beta]_{\sim} \Leftrightarrow \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

to naprawdę jest porządek?

Zwrotność: Zawsze $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$ – to łatwe:

$$\frac{\alpha \vdash \alpha}{\vdash \alpha \rightarrow \alpha} (W \rightarrow)$$

Antysymetria: Jeśli $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ oraz $\vdash \beta \rightarrow \alpha$, to $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$.

Ale $\alpha \leftrightarrow \beta$ to tak naprawdę koniunkcja $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

$$\frac{\vdash \alpha \rightarrow \beta \quad \vdash \beta \rightarrow \alpha}{\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)} (W \wedge)$$

Łatwa, ale ważna uwaga

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

(Pamiętamy, że $\alpha \leftrightarrow \beta$ to tak naprawdę koniunkcja $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.)

Fakt: Klasa $1 = [\top]_{\sim}$, to klasa wszystkich twierdzeń.

Dowód: Po pierwsze, jeśli $\vdash \alpha$, to także $\top \vdash \alpha$, bo $\top$ można wszędzie bezkarnie dopisać. (To się nazywa *osłabianie*.) Stąd $\vdash \top \rightarrow \alpha$. Analogicznie $\vdash \alpha \rightarrow \top$, bo $\vdash \top$.

Po drugie, jeśli $\vdash \top \rightarrow \alpha$, to $\vdash \alpha$, bo $\vdash \top$.

Czy algebra formuł jest algebrą Boole'a?

Porządek jest: $[\alpha]_{\sim} \leq [\beta]_{\sim} \Leftrightarrow \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Operacje i stałe łatwo wskazać:

$$1 = [\top]_{\sim}, \quad 0 = [\perp]_{\sim}.$$

$$[\alpha]_{\sim} \cup [\beta]_{\sim} = [\alpha \vee \beta]_{\sim}$$

$$[\alpha]_{\sim} \cap [\beta]_{\sim} = [\alpha \wedge \beta]_{\sim}$$

$$\neg[\alpha]_{\sim} = [\neg\alpha]_{\sim}.$$

Ale czy spełnione są wszystkie żądane warunki?

Algebra formuł

Czy relacja $\leq$ w zbiorze $\mathcal{F}$ wszystkich formuł

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

jest relacją porządkującą?

Nie, bo nie jest antysymetryczna. No to weźmy relację równoważności

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

i uporządkujmy klasy abstrakcji.

Zbiór $\mathcal{L} = \mathcal{F}/\sim$, uporządkowany relacją

$$[\alpha]_{\sim} \leq [\beta]_{\sim} \Leftrightarrow \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

nazywamy *algebrą Lindenbauma-Tarskiego*.

$$[\alpha]_{\sim} \leq [\beta]_{\sim} \Leftrightarrow \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

Przechodność: Załóżmy $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ oraz $\vdash \beta \rightarrow \gamma$.

Niech $\Gamma = \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\}$.

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta \rightarrow \gamma \quad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \alpha}{\Gamma, \alpha \vdash \beta} (E \rightarrow)}{\Gamma, \alpha \vdash \gamma} (E \rightarrow) \\ \frac{\Gamma, \alpha \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma} (W \rightarrow) \\ \frac{\alpha \rightarrow \beta \vdash (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)}{\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)} (W \rightarrow)$$

Jeśli teraz $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ i $\vdash \beta \rightarrow \alpha$, to trzeba dwa razy użyć reguły $(E \rightarrow)$ i dostaniemy $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$.

Algebra formuł

Zbiór $\mathcal{L} = \mathcal{F}/\sim$, uporządkowany relacją

$$[\alpha]_{\sim} \leq [\beta]_{\sim} \Leftrightarrow \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

nazywamy *algebrą Lindenbauma-Tarskiego*.

Ale czy to jest algebra Boole'a?

Czy algebra formuł jest algebrą Boole'a?

Czego potrzebujemy?

Alternatywa jest kressem górnym a koniunkcja dolnym:

- ▶ $\vdash \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$ oraz $\vdash \beta \rightarrow \alpha \vee \beta$;
- ▶ jeśli $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ i $\vdash \beta \rightarrow \gamma$, to $\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma$;
- ▶ $\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ oraz $\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$;
- ▶ jeśli $\vdash \gamma \rightarrow \alpha$ i $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, to $\vdash \gamma \rightarrow \alpha \wedge \beta$.

Negacja jest dopełnieniem:

- ▶ $\vdash \alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \perp$ oraz $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$.

Jeszcze dystrybutywność:

- ▶ $\vdash \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.

Chyba najtrudniejsza część

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg(\alpha \vee \neg\alpha), \alpha \vdash \alpha}{\neg(\alpha \vee \neg\alpha), \alpha \vdash \alpha \vee \neg\alpha} \quad \neg(\alpha \vee \neg\alpha), \alpha \vdash \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \\
 \hline
 \frac{\neg(\alpha \vee \neg\alpha), \alpha \vdash \perp}{\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \vdash \neg\alpha} \\
 \hline
 \frac{\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \vdash \alpha \vee \neg\alpha \quad \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \vdash \neg(\alpha \vee \neg\alpha)}{\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \vdash \perp} \\
 \hline
 \vdash \alpha \vee \neg\alpha
 \end{array}$$

Reszta łatwa.

Dowód twierdzenia o pełności

Założmy, że φ jest tautologią klasycznego rachunku zdań. Zatem ma wartość 1 w każdej algebrze Boole'a przy każdym wartościowaniu.

No to weźmy algebrę Lindenbauma $\mathcal{L}$ i wartościowanie $\varpi(p) = [p]_{\sim}$. Wtedy $[[\alpha]]_{\varpi} = [\alpha]_{\varpi}$ dla każdej formuły α (łatwa indukcja).

W szczególności $[[\varphi]]_{\varpi} = [\varphi]_{\varpi}$.

A skoro to tautologia, to także $[[\varphi]]_{\varpi} = 1 = [\top]_{\sim}$.

Ale to właśnie znaczy, że $\vdash \varphi$.

Nieco silniejsza wersja twierdzenia o pełności

Twierdzenie (łatwe) Dla dowolnej formuły φ i dowolnego skończonego zbioru formuł Γ zachodzi równoważność:

$$\Gamma \models \varphi \quad \text{wtw, gdy} \quad \Gamma \vdash \varphi$$

Twierdzenie uogólnione: Dla dowolnej formuły φ i dowolnego zbioru formuł Γ zachodzi równoważność:

$$\Gamma \models \varphi \quad \text{wtw, gdy} \quad \Gamma \vdash \varphi$$

Ale co znaczy $\Gamma \vdash \varphi$, jeśli Γ jest zbiorem nieskończonym?

Że $\Gamma_0 \vdash \varphi$, dla pewnego skończonego podzbioru $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Nieco silniejsza wersja twierdzenia o pełności

Twierdzenie uogólnione: Dla dowolnej formuły φ i dowolnego zbioru formuł Γ zachodzi równoważność:

$$\Gamma \models \varphi \quad \text{wtw, gdy} \quad \text{istnieje taki skończony zbiór } \Gamma_0 \subseteq \Gamma, \text{ że } \Gamma_0 \vdash \varphi.$$

Twierdzenie (o zwartości): Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to istnieje taki skończony podzbiór $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, że $\Gamma_0 \models \varphi$.

Zwartość

Twierdzenie (o zwartości): Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to istnieje taki skończony podzbiór $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, że $\Gamma_0 \models \varphi$.

Wniosek: Jeżeli każdy skończony podzbiór zbioru Γ jest spełnialny, to cały zbiór Γ jest spełnialny.

Dowód: Jeśli Γ nie jest spełnialny, to $\Gamma \models \perp$. Z twierdzenia o zwartości istnieje więc skończony niespełnialny podzbiór.

Przykład: kolorowanie nieskończonego grafu

Niech G będzie nieskończonym zbiorem, w którym określono symetryczną relację r .

(Myślimy o G jak o zbiorze wierzchołków nieskończonego grafu i o relacji r jak o zbiorze krawędzi tego grafu.)

Relacja r jest **trójkolorowa**, gdy istnieje taki podział zbioru G na trzy składowe, że żadne dwa elementy zbioru G , należące do jednej składowej, nie są w relacji r .

(Wierzchołki połączone krawędziami są różnych kolorów.)

Relacja r jest **trójkolorowa w podzbiorze** $H \subseteq G$, gdy trójkolorowa jest relacja $r \cap (H \times H)$ w zbiorze H .

Kolorowanie nieskończonego grafu

Twierdzenie: Jeśli relacja r jest trójkolorowa w każdym skończonym podzbiorze zbioru G , to jest trójkolorowa w G .

Dowód: Zdefiniujemy pewien nieskończony zbiór Γ formuł rachunku zdań. Użyjemy do tego (nieskończenie wielu) zmiennych zdaniowych postaci p_a^i , dla $a \in G$ oraz $i \in \{1, 2, 3\}$.

Intuicja: p_a^i czytamy „wierzchołek a ma kolor i ”.

W zbiorze Γ są takie formuły:

$$\alpha_a = (p_a^1 \vee p_a^2 \vee p_a^3) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^2) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^3) \wedge \neg(p_a^2 \wedge p_a^3),$$

dla każdego $a \in G$. (Element a ma dokładnie jeden kolor.)

$$\beta_{ab} = \neg(p_a^1 \wedge p_b^1) \wedge \neg(p_a^2 \wedge p_b^2) \wedge \neg(p_a^3 \wedge p_b^3),$$

dla każdej pary $\langle a, b \rangle \in r$. (Elementy a i b są różnego koloru.)

Kolorowanie nieskończonego grafu

$$\alpha_a = (p_a^1 \vee p_a^2 \vee p_a^3) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^2) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^3) \wedge \neg(p_a^2 \wedge p_a^3)$$

$$\beta_{ab} = \neg(p_a^1 \wedge p_b^1) \wedge \neg(p_a^2 \wedge p_b^2) \wedge \neg(p_a^3 \wedge p_b^3)$$

$$\Gamma_H = \{\alpha_a \mid a \in H\} \cup \{\beta_{ab} \mid \langle a, b \rangle \in r \cap H \times H\}, \text{ dla } H \subseteq G.$$

$$\Gamma = \Gamma_G.$$

Zbiór Γ_H jest spełnialny wtw, gdy relacja r jest trójkolorowa w podzbiorze H . A tak jest dla wszystkich skończonych H .

Niech $\Gamma' \subseteq \Gamma$ będzie skończony. Wtedy $\Gamma' \subseteq \Gamma_H$ dla pewnego skończonego $H \subseteq G$. Zatem Γ' jest spełnialny.

Z twierdzenia o zwartości cały zbiór Γ jest spełnialny, czyli relacja r jest trójkolorowa.

Wprowadzanie $\forall$

Naturalna dedukcja pierwszego rzędu

Weźmy dowolne y .	(Cel: $A(y)$)
$\vdots$	
Zatem $A(y)$.	

Zatem $\forall x A(x)$.

$$\frac{\Gamma \vdash A(y)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)} \quad y \notin \text{FV}(\Gamma)$$

Eliminacja $\forall$

$\vdots$
 $\forall x A(x)$
 $\vdots$
 Ponieważ $\forall x A(x)$, więc $A(t)$.
 gdzie t jest dowolnym termem (także zmienną).

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A(x)}{\Gamma \vdash A(t)}$$

Wprowadzanie $\exists$

$\vdots$
 $A(t)$
 $\vdots$
 Ponieważ $A(t)$, więc $\exists x A(x)$
 gdzie t jest dowolnym termem.

$$\frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x A(x)}$$

Eliminacja $\exists$

$\exists x A(x)$
 $\vdots$

Niech y będzie takie, że $A(y)$	(Cel: B)
$\vdots$	
Zatem B .	

Ponieważ $\exists x A(x)$, więc B .

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x A(x) \quad \Gamma, A(y) \vdash B}{\Gamma \vdash B} \quad (y \notin \text{FV}(\Gamma) \cup \text{FV}(B))$$

Przykład: $\forall x(P(x) \rightarrow C), \exists y P(y) \vdash C$

Założmy, że $\forall x(P(x) \rightarrow C)$ oraz $\exists y P(y)$ (Cel 1: C)
 Niech y będzie takie, że $P(y)$. (Cel 2: C)
 Ponieważ $\forall x(P(x) \rightarrow C)$, więc $P(y) \rightarrow C$.
 Ponieważ $P(y)$ oraz $P(y) \rightarrow C$, więc C .
 Ponieważ $\exists y P(y)$, więc C

Oznaczenie: $\Gamma = \{\forall x(P(x) \rightarrow C), \exists y P(y)\}$

$$\frac{\Gamma, P(y) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow C) \quad \frac{\Gamma, P(y) \vdash P(y) \rightarrow C \quad \Gamma, P(y) \vdash P(y)}{\Gamma, P(y) \vdash C}}{\Gamma \vdash \exists y P(y) \quad \Gamma, P(y) \vdash C} \quad \Gamma \vdash C$$

Przykład: $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$

Założmy $\exists x \forall y P(x, y)$	(Cel: $\forall y \exists x P(x, y)$)
Weźmy dowolne $\bar{y}$.	(Cel: $\exists x P(x, \bar{y})$)
Niech $\bar{x}$ będzie takie, że $\forall y P(\bar{x}, y)$.	(Cel: $\exists x P(x, \bar{y})$)
Ponieważ $\forall y P(\bar{x}, y)$, więc $P(\bar{x}, \bar{y})$.	
Ponieważ $P(\bar{x}, \bar{y})$, więc $\exists x P(x, \bar{y})$.	
Ponieważ $\exists x \forall y P(x, y)$, więc $\exists x P(x, \bar{y})$.	
Zatem $\forall y \exists x P(x, y)$.	

Zatem $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$.

Ćwiczenie: Napisać dowód formalny.

Twierdzenie o pełności

Twierdzenie: Dla dowolnej formuły φ i dowolnego zbioru formuł Γ zachodzi równoważność:

$$\Gamma \models \varphi \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \Gamma \vdash \varphi$$

Twierdzenie (o zwartości): Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to istnieje taki skończony podzbiór $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, że $\Gamma_0 \models \varphi$.

Zwartość logiki pierwszego rzędu

Twierdzenie (o zwartości): Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to istnieje taki skończony podzbiór $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, że $\Gamma_0 \models \varphi$.

Wniosek: Jeżeli każdy skończony podzbiór zbioru Γ jest spełnialny, to cały zbiór Γ jest spełnialny.

Dowód: Jeśli Γ nie jest spełnialny, to $\Gamma \models \perp$. Z twierdzenia o zwartości istnieje więc skończony niespełnialny podzbiór.

Zastosowanie twierdzenia o zwartości

Fakt: Nie istnieje formuła φ spełnialna dokładnie w tych modelach, gdzie interpretacją symbolu relacyjnego r jest relacja dobrego porządku.

Dowód: Załóżmy, że takie φ istnieje. Zdefiniujmy formuły

$$\begin{aligned}\alpha_n = & r(x_2, x_1) \wedge \neg r(x_1, x_2) \wedge \\ & r(x_3, x_2) \wedge \neg r(x_2, x_3) \wedge \\ & \dots \\ & r(x_n, x_{n-1}) \wedge \neg r(x_{n-1}, x_n)\end{aligned}$$

(Sens: wartości $x_1, x_2, \dots, x_n$ tworzą skończony ciąg malejący.)

Zbiór $\Gamma = \{\alpha_n \mid n > 1\} \cup \{\varphi\}$ jest niespełnialny.

Ale każdy jego skończony podzbiór Γ_0 jest spełnialny, na przykład w $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$. Sprzeczność.