

Podstawy matematyki – klasówka poprawkowa
13 stycznia 2026

1. W zbiorze $P_+(\mathbb{R}) := P(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$ określamy taką relację s , że dla $X, Y \in P_+(\mathbb{R})$:
 $X s Y$ wtw, gdy X i Y są nieskończone lub X i Y są skończone i $\max X = \max Y$.
 - (a) Udowodnić, że s jest relacją równoważności.
 - (b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $P_+(\mathbb{R})/s$?
 - (c) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji relacji s .
2. Niech $H : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$ będzie funkcją określoną następująco:

$$H(f, X) = f(f^{-1}(X))$$

- (a) Czy funkcja H jest różnowartościowa? Czy jest na zbiór $P(\mathbb{N})$?
- (b) Niech $\mathcal{C}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji stałych z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Znaleźć obraz zbioru $\mathcal{C} \times P(\mathbb{N})$ przy przekształceniu H i wyznaczyć jego moc.
- (c) Wyznaczyć moc zbioru $H^{-1}(\{\mathbb{N}\})$.
- (d) Wyznaczyć moc zbioru $H^{-1}(\text{SIN})$, gdzie SIN to rodzina wszystkich singletonów.

(Rodzina wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{R}$ jest mocy $\mathfrak{C}$, a rodzina wszystkich nieskończonych podzbiorów $\mathbb{R}$ jest mocy $2^{\mathfrak{C}}$. Zbiór wszystkich bijekcji $\mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$ jest mocy $\mathfrak{C}$.)

Rozwiązania

1a: To jest jądro operacji $m : P_+(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R} \oplus \{\perp\})$ określonej tak:

$$m(X) = \text{if } X \text{ jest skończone then } \max X \text{ else } \perp.$$

1b: Moc zbioru ilorazowego jest ograniczona z góry przez $\mathfrak{C}$, gdyż taka jest moc przeciwdziedziny operacji m , której jądrem jest relacja s . Aby pokazać, że $\mathfrak{C}$ ogranicza tę moc również z dołu, wystarczy pokazać, że funkcja m jest surjekcją. Jest to jednak dość oczywiste, ponieważ $m(\mathbb{R}) = \top$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}$, mamy $m(\{x\}) = x$. A zatem z tw. Cantora-Bernsteina moc zbioru ilorazowego to continuum.

1c: Moce klas abstrakcji to $\mathfrak{C}$ i $2^{\mathfrak{C}}$. Jeśli $A \in P_+(\mathbb{R})$ jest zbiorem skończonym i jego elementem największym jest liczba m , to klasa abstrakcji $[A]_s$ jest mocy $\mathfrak{C}$. Istotnie, z dołu moc tej klasy ogranicza liczba $\mathfrak{C}$, bo istnieje funkcja różnowartościowa $\lambda x. \{x, m\} : (-\infty, m) \xrightarrow{1-1} [A]_s$. Jest to również ograniczenie górne, ponieważ moc rodziny wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{R}$ to $\mathfrak{C}$, a $[A]_s$ jest niewątpliwie podzbiorem tej rodziny.

Pozostałe zbiory $A \in P_+(\mathbb{R})$ są nieskończone i tworzą jedną klasę abstrakcji mocy $2^{\mathfrak{C}}$.

2a: Funkcja H nie jest różnowartościowa, np. dlatego, że $H(\text{id}_{\mathbb{N}}, \{0\}) = \{0\} = H(\lambda x. 2x, \{0\})$. Ale jest surjekcją, bo $H(\text{id}_{\mathbb{N}}, X) = X$ dla każdego zbioru X .

2b: Jeśli $f = \lambda x. n$, oraz $n \in X$, to $H(f, X) = f(f^{-1}(X)) = f(\mathbb{N}) = \{n\}$. W przeciwnym przypadku $H(f, X) = f(\emptyset) = \emptyset$. A więc obraz zbioru $\mathcal{C} \times P(\mathbb{N})$ to rodzina $\text{SIN} \cup \{\emptyset\}$, która jest oczywiście mocy $\aleph_0$.

2c: Ponieważ dziedzina funkcji H jest zbiorem mocy continuum, więc moc $H^{-1}(\{\mathbb{N}\})$ jest ograniczona z góry przez continuum. Ale z dołu też, bo dla każdej bijekcji f zachodzi $H(f, \mathbb{N}) = \mathbb{N}$, a zbiór wszystkich bijekcji $\mathbb{N} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{N}$ ma moc $\mathfrak{C}$.

2d: Jest to zbiór mocy continuum. Ograniczenie z góry jest oczywiste tak samo jak w części 2c. Dla ograniczenia dolnego zauważmy, że jeśli f jest bijekcją z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$, to istnieje dokładnie jedna liczba k , taka że $f(k) = 0$. Wtedy $f^{-1}(\{0\}) = \{k\}$, więc $f(f^{-1}(\{0\})) = \{0\}$.

Zatem operacja $\Xi : \mathcal{B} \xrightarrow{1-1} H^{-1}(\text{SIN})$, gdzie $\mathcal{B}$ oznacza zbiór wszystkich bijekcji z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$, dana wzorem $\Xi(f) = \langle f, \{0\} \rangle$, jest dobrze określona. Jest też oczywiście różnowartościowa, a ponieważ zbiór $\mathcal{B}$ jest mocy continuum, więc z tw. Cantora-Bernsteina wynika, że moc $H^{-1}(\text{SIN})$ to continuum.